

## §7. Псевдовязкость

В предыдущих параграфах уже было много сказано о свойстве диссипативности разностных схем и его влиянии на решение уравнений в частных производных. Оказывается, диссипативность схемы во многих случаях вовсе не является негативным фактором. Следует лишь помнить о нём при интерпретации результатов моделирования, а иногда и использовать его полезные возможности.

Рассмотрим на примере уравнения переноса с диффузией

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = D \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (53)$$

подход, который широко используется в вычислительной гидродинамике. Будем, для простоты, использовать явную схему:

$$\frac{\hat{u}_i - u_i}{\tau} + c \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta} = \frac{D \cdot u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta^2}, \quad (54)$$

которая является комбинацией схем (42) и (4). Она, конечно, не очень хороша, в основном, из-за довольно жесткого критерия устойчивости:

$$\frac{2D\tau}{\Delta^2} < 1, \quad \frac{c\tau}{\Delta} < 1, \quad (55)$$

зато просто реализуется при помощи «бегущего счета».

Несложно показать, что 1-е дифференциальное приближение схемы (54) выглядит следующим образом:

$$u_i + c \cdot u_x - D \cdot u_{xx} = \frac{c}{2} (\Delta - c \cdot \tau) \cdot u_{xx} - \frac{D^2 \cdot \tau}{2} \cdot u_{xxxx} + o(\Delta + \tau). \quad (56)$$

Сравнивая (56) и исходное уравнение (53), следует констатировать, что схема (54) включает как «настоящие», так и «паразитные» (свои собственные) диффузионные слагаемые, обладая *аппроксимационной вязкостью*. Естественным ходом

будет их объединение, т.е. подстановка в схему (54) вместо  $D$  некоторого (меньшего) эффективного коэффициента диффузии  $D_{\text{eff}}$ , который будет зависеть от шагов сетки и определяться как

$$D_{\text{eff}} = D - \frac{c}{2} (\Delta - c \cdot \tau) \quad (57)$$

Тогда 1-е дифференциальное приближение даст диффузионное слагаемое, в точности равное нужному коэффициенту диффузии. Если использовать в расчетах эффективный коэффициент диффузии (57), то влияния диссипативности схемы, которая обсуждалась в предыдущем параграфе (см. рис. 26-27), можно избежать.

Сказанное иллюстрируется рис. 31 и 32, на которых показаны два решения уравнения (53), полученные на разных сетках. В отличие от рис. 26-27, динамика амплитуды профиля и расплывания решения практически не отличаются.

Важно отметить, что в случае расчетов рис. 31 (на более подробной сетке) пришлось использовать отрицательный эффективный коэффициент диффузии, чтобы компенсировать избыточную диссипативность разностной схемы.

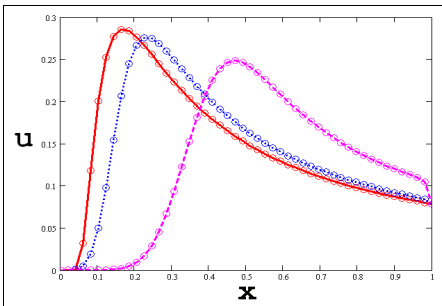


Рис. 31. Расчеты по схеме (54) с  $D_{\text{eff}}$ :  
 $\Delta=1/49$ ,  $D=0.05$ ,  $D_{\text{eff}}=0.011$

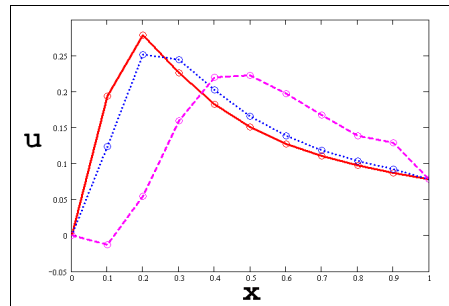


Рис. 32. Расчеты по схеме (54) с  $D_{\text{eff}}$ :  
 $\Delta=0.1$ ,  $D=0.05$ ,  $D_{\text{eff}} \approx -0.19$

Другая полезная сторона диссипативности разностных схем проявляется при расчетах разрывных решений. Вернемся вновь к двум разностным схемам для уравнения переноса (40): явной схеме (41), обладающей, как мы выяснили в предыдущем

параграфе, диссипативными свойствами, и недиссипативной схеме «квадрат» (51).

Посмотрим, как эти схемы ведут себя на разрывных решениях, в частности, на примере задач с разрывными начальными условиями (рис 33 и 34), которые физически можно сопоставить с распространением ударной волны.

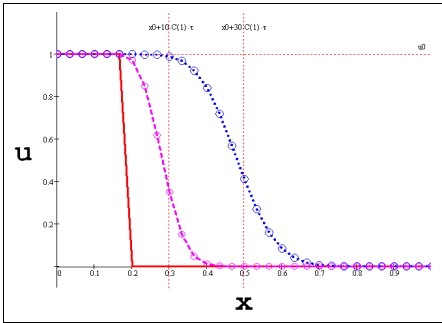


Рис. 33. Расчеты по диссипативной схеме (41) : разрыв «размывается»

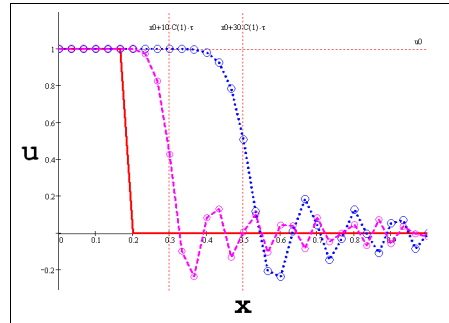


Рис. 34. Расчеты по недиссипативной схеме (51)

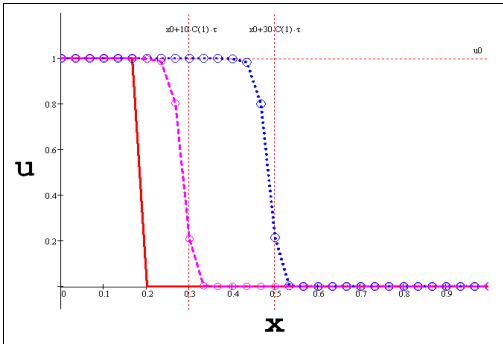
Точное решение уравнения переноса в рассматриваемом примере представляет собой, конечно, равномерное перемещение разрыва вправо со скоростью  $s$ . Расчеты по диссипативной схеме (41) дают «размытое» решение: разрыв, по мере распространения, сглаживается (рис. 33). Недиссипативная схема (51) вносит в решение характерные колебания (рис. 34), которые не являются проявлением неустойчивости (как Вы помните, эта схема безусловно-устойчива). Такие разностные схемы, которые приводят к немонотонным решениям задач с монотонными начальными условиями называются *немонотонными*.

В типовых случаях, при расчете разрывных решений более предпочтительным представляется как раз вариант их «размытия», чтобы иметь дело не с разрывными, а с непрерывными (и, желательно, гладкими) решениями. Эффективный прием расчетов разрывных решений заключается в добавлении в сами дифференциальные уравнения искусственной

вязкости (*псевдовязкости*). Например при решении нелинейного уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad , \quad (58)$$

в него может быть добавлено искусственное диффузионное слагаемое с малым коэффициентом диффузии:



**Рис. 35.** Решение нелинейного уравнения переноса с псевдовязкостью

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = d \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad (59)$$

превращающее его в уравнение Бюргера. В результате, разрыв будет сглаживаться, превращаясь в непрерывное решение (рис. 35). Если выбрать параметр  $d$  пропорциональным шагу сетки:  $d = k \cdot \Delta$  ( $k$  – некоторое целое число), то

разрыв будет «размываться» на  $k$  пространственных шагов сетки, что позволяет лучше контролировать правильность расчета разрывных решений. Таким образом, искусственно введенная псевдовязкость, играет положительную роль при сглаживании разрывных решений .

В заключение остановимся на одной неожиданной опасности, которую таят расчеты уравнений с разрывными решениями. Казалось бы, разработка разностной схемы подходящего порядка аппроксимации и последующий (возможно, не аналитический, а численный) анализ ее устойчивости и монотонности гарантирует получение сеточного решения, сходящегося к точному решению исходного уравнения. Действительно, если мы организуем, как это принято, серию вычислений на разных сетках (с различными шагами по времени и пространству) и получим одинаковые (в пределах погрешности) решения, то, вроде бы, вправе ожидать, что полученный численный результат и есть решение нашей

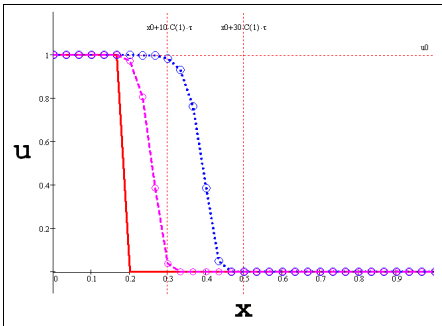


Рис. 36. «Ложная сходимость»

задачи. Увы! Существует опасность натолкнуться на свойство разностных схем, называемое «ложной сходимостью». Приведем пример, предложенный в [1]: рассмотрим следующую разностную схему для нелинейного уравнения переноса (58):

$$\frac{\hat{u}_i - u_i}{\tau} + u_{i-1} \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta} = 0 \quad (60)$$

Значение скорости нелинейного переноса  $s(u)=u$  мы взяли с предыдущего шага по пространству  $u_{i-1}$ . Схема является устойчивой, и результат расчетов по ней представлен на рис. 36. Если сравнить его с «правильным» рис. 35, то мы с недоумением обнаружим, что это решение неверное! Несмотря на то, что пространственный профиль решения передан правильно, скорость его распространения гораздо ниже истинной. В этом Вы можете убедиться, сравнивая метки по оси X, выделенные пунктиром на рис. 35 и 36. Это и есть «ложная сходимость».

Если в схеме (60) вместо скорости нелинейного переноса (i-1)-го узла использовать ее значение в i-м узле  $u_i$ , то ситуация еще ухудшится – решение будет в любой момент времени совпадать с начальным условием. Решает проблему применение схемы

$$\frac{\hat{u}_i - u_i}{\tau} + \frac{u_i \cdot u_i - u_{i-1} \cdot u_{i-1}}{\Delta} = 0 \quad (61)$$

расчеты по которой приводят примерно к тем (правильным) результатам, показанным на рис. 35.

Общим рецептом действий в подобных ситуациях является разработка тестовых задач, например, являющихся частными случаями исходной задачи, для которых точное решение

известно. Если полученные сеточные решения тестовых задач совпадают с их точными решениями, то можно надеяться (но не быть до конца уверенными), что и более сложная исходная задача тоже будет решена правильно.