

§5. Примеры

Приведем теперь несколько примеров решения разных дифференциальных уравнений при помощи разностных схем. Начнем с нескольких вариантов нелинейного уравнения диффузии тепла, для решения которого используем явную схему (рис. 9) с временным шагом, меньшим числа Куранта (7), что обеспечит ее устойчивость.

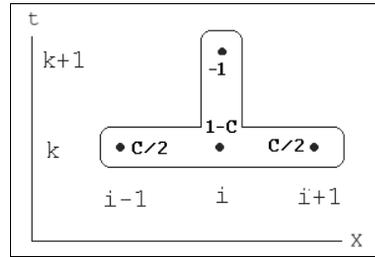


Рис. 9. Шаблон явной схемы

Пример: Диффузия с нелинейным источником – тепловые волны

Начнем знакомство с нелинейным уравнением теплопроводности с того, что добавим в него некоторый источник тепла, нелинейно зависящий от $u(x,t)$. Для начала напомним общий вид уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \phi(x, t, u) \quad , \quad (25)$$

а потом выберем определенный вид нелинейного источника, например, с кубической нелинейностью:

$$\phi(u) = 10^3 \cdot (u - u^3) \quad . \quad (26)$$

Коэффициент диффузии D , по-прежнему, считаем постоянным. В этом случае расчеты по явной схеме Эйлера дадут намного более интересные, нежели для линейного уравнения, решения. Оказывается, что, если задать источник в виде (26), то получится весьма неожиданное решение в форме тепловых фронтов, распространяющихся в обе стороны от зоны первичного нагрева (рис. 10).

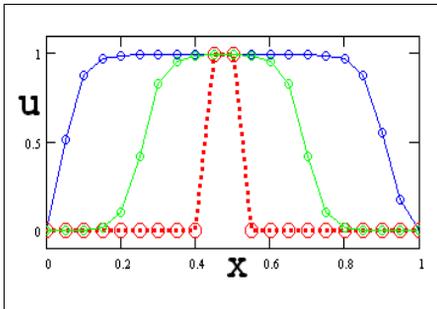


Рис. 10. Нелинейное уравнение диффузии: решение – тепловая волна

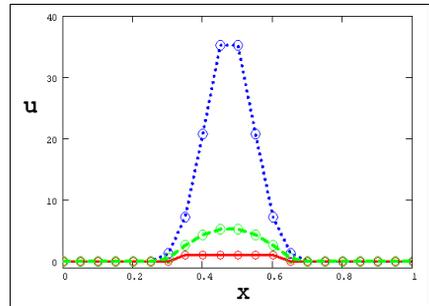


Рис. 11. Нелинейная диффузия тепла: локализация горения

Пример: Нелинейная диффузия – «горение с обострением»

Еще более удивительные решения уравнения диффузии тепла возможны при нелинейности не только источника, но и коэффициента диффузии. Например, если взять квадратичный коэффициент диффузии

$$D(u)=u^2, \quad (27)$$

что создаст в задаче кубическую нелинейность, и источник

$$\phi(u)=10^3 \cdot u^{3.5}, \quad (28)$$

то можно наблюдать эффект горения среды, локализованный в области ее первичного нагрева (рис. 11). На рис. 11 показаны 5-й, 6-й и 7-й шаги по времени, которые демонстрируют, что температура в центре среды сильно возрастает. Оказывается, это возрастание температуры носит неограниченный характер, и за конечное время температура обращается в бесконечность. Это – так называемый *S-режим горения*, называемый еще *горением «с обострением»*. Существенно, что такие интересные результаты, как тепловая волна и S-горение удастся получить лишь численно.

Конечно, нелинейные (причем сильно нелинейные) уравнения диффузии описывают более сложные среды, нежели металлический стержень, показанный на рис.1. Однако, замечательно, что эти среды вполне реальны, и описанные

эффекты можно наблюдать экспериментально на настоящих физических объектах.

Пример: стационарное двумерное уравнение диффузии тепла

До сих пор мы рассматривали одномерное уравнение теплопроводности, т.е. зависящее, помимо времени, только от одной пространственной координаты. Конечно, можно рассматривать не одномерную, а двух- или даже трехмерную конфигурацию. В двумерном случае уравнение теплопроводности запишется в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \phi(x, t, u) . \quad (29)$$

Принципиальных отличий в построении разностных схем для двумерных уравнений нет. Надо только правильно определить расчетную область (которая будет иметь более сложную форму), поставить граничные условия и осуществить их дискретизацию.

Частный случай уравнения теплопроводности определяет стационарную, т.е. не зависящую от времени, задачу. Стационарное уравнение, которое получается из (29) путем приравнивания нулю производной по времени

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = - \frac{\phi(x, t, u)}{D} , \quad (30)$$

описывает физическую картину распределения температуры по пластине, не изменяющуюся с течением времени. Такая картина может возникнуть при условии, что стационарный источник тепла действует довольно продолжительное время, и переходные процессы, вызванные его включением, прекратились. Уравнение (30) называют *уравнением Пуассона*, а в частном случае нулевого источника тепла – *уравнением Лапласа*. В отличие от рассмотренных нами ранее *параболических* уравнений в частных

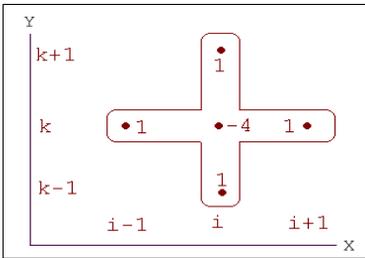


Рис. 12. Шаблон «крест»

производных, уравнение Пуассона (30) относят к *эллиптическим* уравнениям.

Для построения разностной схемы эллиптического уравнения (30) можно использовать шаблон типа «крест» (рис. 12). Если по каждой координате используется N узлов, то разностная схема подразумевает

решение системы N^2 линейных алгебраических уравнений, поскольку бегущий счет в данном случае организовать не удастся. Разностные уравнения привязаны к центральной точке «креста» (рис. 12), поэтому их будет всего $(N-2) \cdot (N-2)$. Остальные разностные уравнения должны быть взяты из граничных условий. Самый простой вариант условий на границе – это равенство искомой функции нулю: $u(x,y)=0$.

Результат численного решения (30) посредством схемы «крест» для нулевых граничных условий и двух точечных источников разной интенсивности показан на рис. 13 в виде графика поверхности $u(x,y)$. Отметим, что аналогичным образом (графиком поверхности) можно визуализировать и решение одномерного динамического уравнения диффузии тепла, которое мы раньше показывали в виде последовательных по времени профилей $u(x)$. Если взять в качестве одной из координат время, то решение будет иметь структуру, показанную на рис. 14.

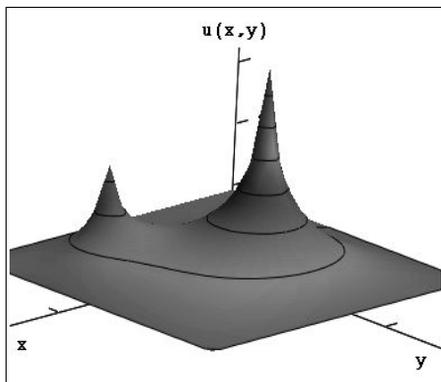


Рис. 13. Решение стационарного двумерного уравнения диффузии тепла

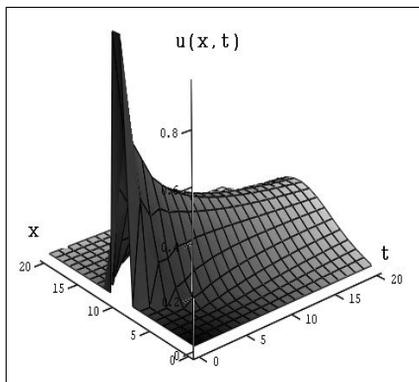


Рис. 14. Решение одномерного уравнения (график поверхности)