

§3. Устойчивость разностных схем

Проведем расчеты по явной разностной схеме (6) сначала для линейного уравнения диффузии. Выберем (рис.5) определенные значения шага по времени и пространству так, чтобы число Куранта (7) было меньше 1. Для получения сеточного решения достаточно, как уже говорилось, рассчитать рекуррентные соотношения (6), для получения соответствующих пространственных профилей решения для каждого момента времени.

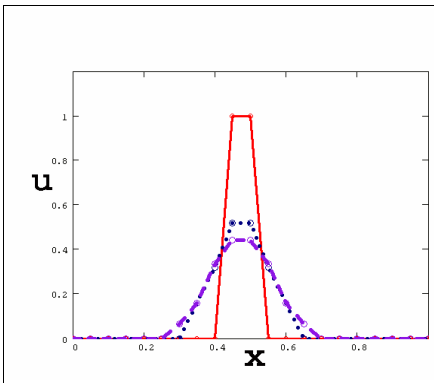


Рис. 5. Устойчивое решение (явная схема, число Куранта $C < 1$)

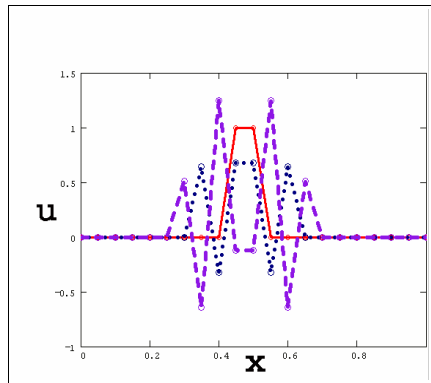


Рис. 6. Неустойчивое решение (явная схема, число Куранта $C > 1$)

Как видно из рис. 5, показывающего начальное условие (сплошная линия) и два первых шага интегрирования по времени, решения получаются вполне предсказуемыми и физически очевидными. А именно, оно описывает остывание стержня, выражающееся в перетекании тепла от нагретого центра к холодной периферии. Это решение, повторимся, можно выписать аналитически.

Как мы убедились, явная разностная схема Эйлера дает вполне разумные результаты и вполне может использоваться для решения уравнений в частных производных. Однако теперь пришло время сказать об очень важной характеристике разностных схем, которая называется их *устойчивостью*. Не вдаваясь в детали (а темы устойчивости мы уже неоднократно

касались на примере разностных схем для ОДУ), заметим, что производить расчеты можно только при помощи устойчивых разностных схем.

Чтобы пояснить понятие устойчивости, вернемся вновь к явной схеме (6) для линейного уравнения диффузии. Слегка изменим соотношение шагов по времени и пространственной координате, произведя расчеты для чуть большего шага по времени, нежели был использован для получения рис. 5. Оказывается, что, казалось бы, незначительное) увеличение шага до $\tau=0.0015$ приводит к катастрофе. Вместо ожидаемого решения получаются совершенно неожиданные профили температуры, которые быстро осциллируют вдоль пространственной координаты, причем амплитуда и число пиков этих осцилляций быстро увеличиваются от шага к шагу.

При дальнейшем увеличении временного шага ситуация только ухудшается. На рис. 6 показано сеточное решение для $\tau=0.002$. Совершенно ясно, что оно не имеет ничего общего с физикой моделируемого явления, а является следствием внутренних свойств самой разностной схемы, которые до этого были для нас скрыты.

Характерная «разболтка» решения как раз и является проявлением неустойчивости явной схемы Эйлера для выбранного соотношения шагов по времени и пространству. Ниже мы покажем, что явная схема Эйлера для уравнения теплопроводности устойчива при значениях коэффициента Куранта, меньших 1, и неустойчива в противоположном случае. Иными словами, существует ограничение на выбор соотношения шагов, заключающееся в том, что для расчета на более частых пространственных сетках необходимо использовать также и малые шаги по времени.

Покажем, как производится анализ устойчивости, на примере явной разностной схемы Эйлера для уравнения диффузии тепла. Запишем схему (4) в следующем виде

$$\frac{\hat{u}_i - u_i}{\tau} = D \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta^2} + \phi_i, \quad (8)$$

применяя, тем самым, для обозначения сеточной функции на верхнем слое по времени вместо соответствующего индекса «крышку». Перепишем теперь явную схему (8) в форме реализации шага по времени, положив для простоты источник равным нулю и вынося слагаемые с «крышкой» (а оно у нас единственное) в левую часть:

$$\hat{u}_i = u_i + \frac{D\tau}{\Delta^2} \cdot (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}), \quad (9)$$

Для того, чтобы исследовать устойчивость схемы, надо выяснить, как эволюционирует погрешность решения при переходе от слоя к слою. Для этого предположим, что на нижнем слое по времени сеточная функция известна с некоторой погрешностью ε относительно точного решения $u(x)$:

$$u_i = u(x) + \varepsilon_i \quad (10)$$

Подстановка (10) в разностное уравнение (9) и учет того факта, что точные $u(x)$ удовлетворяют исходному уравнению диффузии и потому могут быть сокращены, дает разностное уравнение для динамики погрешности ε :

$$\hat{\varepsilon}_i = \varepsilon_i + \frac{D\tau}{\Delta^2} \cdot (\varepsilon_{i-1} - 2\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1}). \quad (11)$$

Разделив это выражение на ε_i , получим относительное изменение погрешности при переходе на новый слой по времени:

$$\frac{\hat{\varepsilon}_i}{\varepsilon_i} = 1 - \frac{D\tau}{\Delta^2} \cdot \left(2 - \frac{\varepsilon_{i-1} + \varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i} \right). \quad (12)$$

Теперь требуется оценить правую часть равенства (12). Если она меньше 1, то схема устойчива (погрешности не нарастают), а если больше – то неустойчива.

Предположим, что погрешность эта имеет следующую (гармоническую) зависимость от пространственной координаты с некоторым волновым числом k :

$$\varepsilon_i = \varepsilon \cdot \exp(I \cdot k \cdot x_i) = \varepsilon \cdot \exp(I \cdot k \cdot i \cdot \Delta) \quad . \quad (13)$$

Символом I мы обозначили мнимую единицу, дабы не путать ее с индексом i . Отметим, что предположение (13) не является слишком искусственным, т.к. настоящая погрешность может быть выражена через спектр гармоник (13) с разными k и ε .

Подставляя (13) в оценку (12), получим:

$$\frac{\hat{\varepsilon}_i}{\varepsilon_i} = 1 - \frac{2D\tau}{\Delta^2} \cdot \left(1 - \frac{\exp(Ik\Delta) + \exp(-Ik\Delta)}{2} \right) \quad . \quad (14)$$

Поскольку в (14) каждая из экспонент от мнимого аргумента может иметь значения от -1 до 1 , то выражение в скобках может изменяться в диапазоне от 0 до 2 . Из этого следует, что абсолютное значение относительной погрешности $|\hat{\varepsilon}_i/\varepsilon_i|$ может превысить 1 , если будет выполнено:

$$C \equiv \frac{2D\tau}{\Delta^2} > 1 \quad . \quad (15)$$

Это как раз то самое условие неустойчивости, которое было нами исследовано численно на рис. 5 и 6. В полученной оценке погрешности фигурирует число Куранта C , которое было нами введено в предыдущем параграфе. Таким образом, явная схема (8) для уравнения диффузии является *условно-устойчивой*. Если число Куранта меньше 1 , то схема дает верное решение, а если больше – то неверное. Примечательно, что аналог числа Куранта и условия типа (15) получается для большого количества разностных схем (для других уравнений).

В заключение отметим, что, если провести аналогичные рассуждения и для неявной схемы, окажется, что оценка относительной погрешности $|\hat{\varepsilon}_i/\varepsilon_i|$ типа (14) будет всегда меньше 1. Поэтому неявная схема является безусловно-

устойчивой, что подтверждается и вычислительным экспериментом. На рис. 7 показаны профили сеточной функции для нескольких временных слоев (второго и пятого). Видно, что, несмотря на большое значение числа Куранта ($C=4$), схема сохраняет устойчивость и выдает правильное решение.

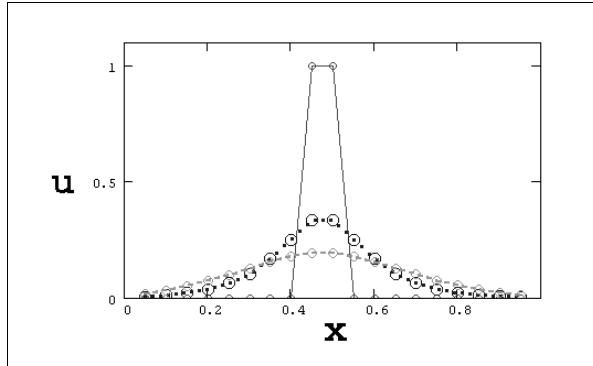


Рис. 7. Решение при помощи неявной схемы (число Куранта $C=4$)