§6. Жесткие задачи и неявные схемы

Продолжим исследование модели взаимодействия световых пучков (см. §2) и начнем с того, что попробуем решить ту же самую задачу с несколько иными параметрами: a=10, r=0.01. Такое (большее на полтора порядка, нежели в примере §4) соотношение коэффициентов поглощения и рассеяния, на самом деле, более реалистично, т.к. эффект рассеяния назад крайне незначителен.

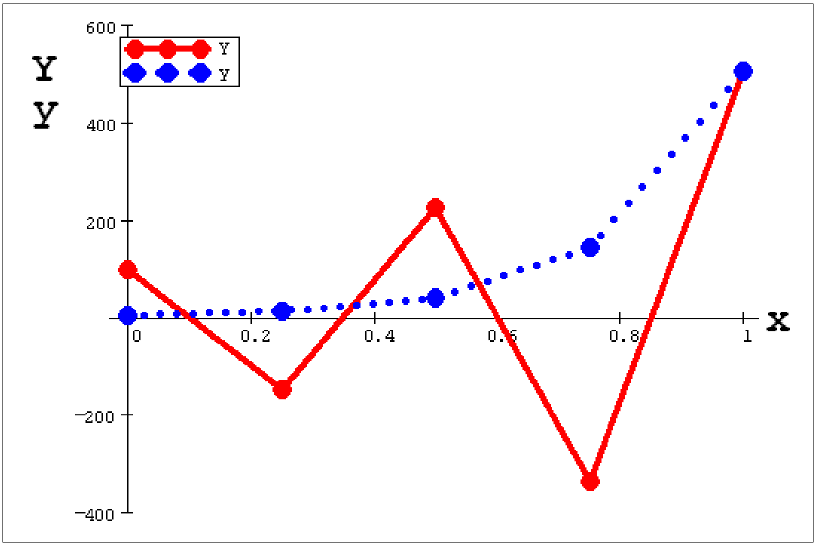

Рис. 29. *Неустойчивое решение (явная схема), N=5, a=10, r=0.01*

Результат применения явной схемы, представленной в предыдущем разделе, крайне неутешителен (рис. 29). Вместо верного решения схема при N=5 дает характерную для неустойчивых разностных схем «разболтку» – колебания нарастающей амплитуды, не имеющие ничего общего с реальностью. Несколько спасает положение применение более частой сетки. При N=20 «разболтка» пропадает, и решение вновь становится правильным (рис. 30).

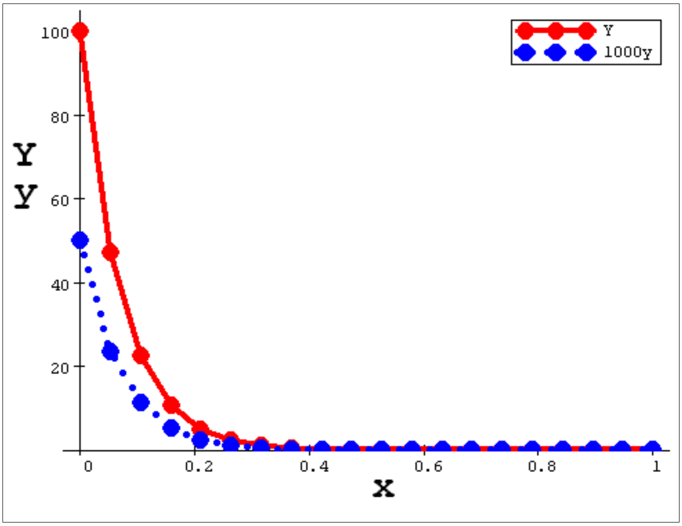

Рис. 30. *Верное решение (явная схема), N=20*

Однако, при увеличении коэффициента поглощения до a=50 решение вновь становится неустойчивым (рис. 31).

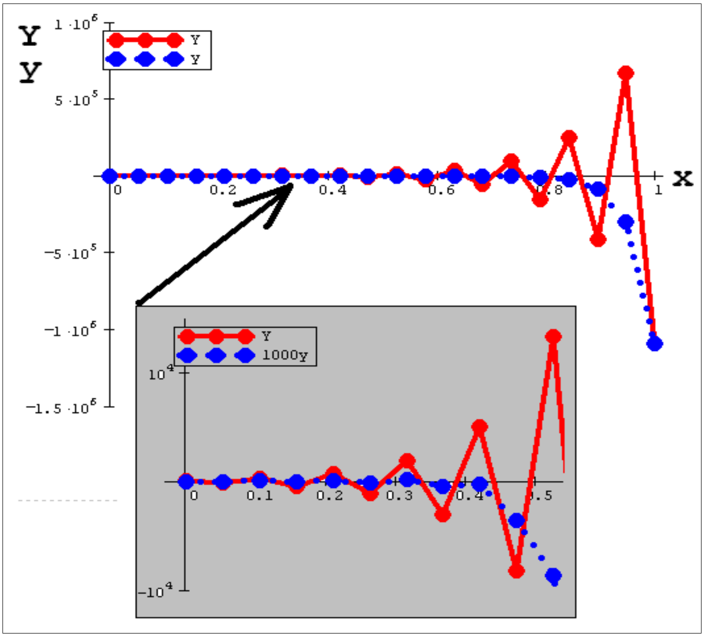

Рис. 31. *Неустойчивое решение (явная схема), N=20, a=50, r=0.01*

Примечательно, что решения для прямого и встречного пучков отличаются на несколько порядков, т.е. при увеличении коэффициента ослабления a(x) в десятки раз рассматриваемое ОДУ становится *жестким*.

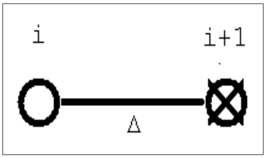

Рис. 32. *Шаблон неявной схемы*

Выходом из положения будет использование *неявных* разностных схем. Применительно к нашей задаче достаточно заменить правые части уравнений (32) значениями не на левой, а на правой границе каждого шага, т.е. вместо шаблона рис. 25 использовать шаблон неявной схемы, изображенный на рис. 32. Тогда в разностных уравнениях правые части будут браться не в i-й, а в (i+1)-й точке:

$$\begin{aligned} \frac{Y_{i+1}-Y_i}{\Delta} &= -a_{i+1}\cdot Y_{i+1} + r_{i+1}\cdot y_{i+1}, \\ \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta} &= +a_{i+1}\cdot y_{i+1} - r_i\cdot Y_{i+1}. \end{aligned} \tag{38}$$

Граничные условия, мы оставим в том же виде (36). Поскольку мы имеем дело с линейными дифференциальными уравнениями, то и неявную схему легко будет записать в виде матричного равенства, перегруппировывая соответствующим образом выражение (38) и приводя подобные слагаемые:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{z}=\mathbf{b} \tag{39}$$

Разумеется, полученная матрица **A** (рис. 33) будет иной, нежели матрица **A** для явной схемы (см. рис. 26). Поэтому и решение (*реализация* неявной схемы) может отличаться от результата расчетов по явной схеме. Отличие заключается лишь в формировании матрицы A другим способом, согласно неявной схеме.

Один из случаев, когда применение неявных разностных схем исключительно полезно, связан с решением жестких краевых задач. Как уже отмечалось, попытка решить при помощи явной схемы рассматриваемую задачу с a(x)=50 приводит к неверному неустойчивому результату (рис. 31).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0.75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0.75 \end{pmatrix}$$

***Рис. 33.** Структура матрицы **A** (неявная схема) при N=5, a=1, r=0.04*

А вот применение неявной схемы, показанное на рис. 34, демонстрирует, что произошло небольшое чудо: неустойчивость исчезла, а распределение интенсивностей стало физически предсказуемым. Тот же результат сохранится и при дальнейшем увеличении a(x).

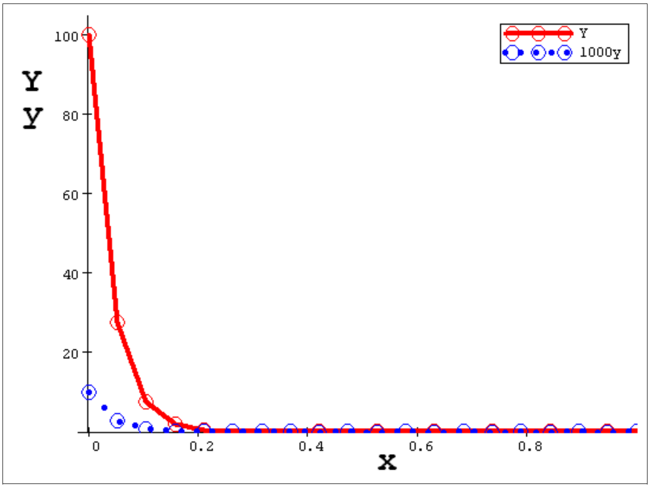

***Рис. 34.** Решение очень жесткой краевой задачи (неявная схема): N=20, a=50, r=0.01*

Обратите внимание, что, из-за взятого нами слишком большого коэффициента ослабления излучения, отраженный пучок света имеет очень маленькую интенсивность, и соответствующую функцию y(x) пришлось построить с увеличением в тысячу раз.

Говоря о разностных схемах для краевых задач, стоит напомнить об их двух важных свойствах: устойчивости и порядке аппроксимации. Они анализируются точно так же, как и для задач Коши для ОДУ (см. гл. 3) и краевых задач для уравнений в частных производных (см. гл.6). Например, можно получить аналитические оценки условия устойчивости, связывающие параметры задачи с шагом сетки, для явной и неявной схемы Эйлера, что объяснит неустойчивое поведение явной схемы (рис. 29 и 31) при умеренно больших значениях шага.

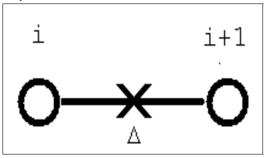

Рис. 35. *Шаблон схемы 2-го порядка*

Несложно показать, что обе схемы (35) и (38) имеют первый порядок аппроксимации, а чтобы получить схему более высокого (второго) порядка, следует использовать симметричную схему, шаблон которой изображен на рис. 35.