§3. Алгоритм пристрелки: сведение краевых задач к задачам Коши

Для решения краевых задач существует популярный алгоритм, называемый методом *стрельбы*, или *пристрелки*. Он сводит краевую задачу к серии задач Коши с различными начальными условиями. Рассмотрим основной принцип алгоритма пристрелки на примере модели встречных пучков света.

Суть алгоритма пристрелки заключается в пробном задании недостающих граничных условий на левой границе интервала и решении затем полученной задачи Коши хорошо известными методами (см. гл. 3). В нашем примере не хватает одного начального условия – для y(0).

Для запуска алгоритма пристрелки сначала зададим для y(0) произвольное значение:

$$y(0)= y^0, \qquad (5)$$

например, $y(0)=0.1\cdot I0=10$. Конечно, такой выбор не совсем случаен, поскольку из физических соображений ясно, что, во-первых, интенсивность излучения – величина заведомо положительная, и, во-вторых, отраженное излучение должно быть намного меньше падающего.

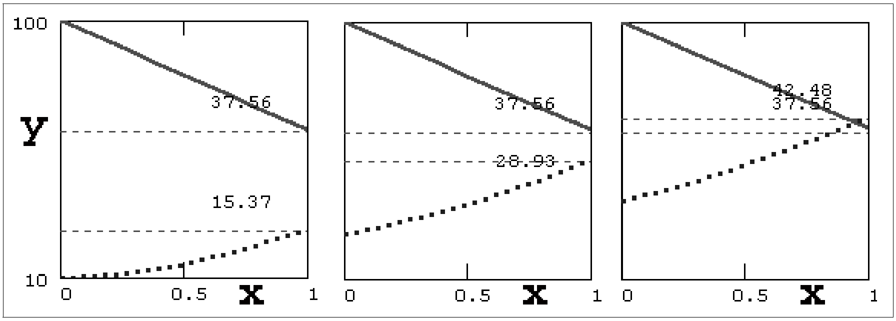

Рис. 4. *Иллюстрация метода пристрелки*

Решение данной задачи Коши приведено на рис. 4 (слева). Разумеется, на правой границе интервала значения искомых функций не совпадают, т.к. взятое наугад второе начальное условие не обеспечило выполнение граничного условия при x=1. Поскольку правое краевое условие не выполнено, полученный результат не является решением поставленной краевой задачи.

В целях лучшего выполнения этого граничного условия следует взять большее значение y1(0), например, y(0)=15, и вновь решить задачу Коши. Соответствующий результат показан на том же рис. 4 (в центре). Граничное условие выполняется с лучшей точностью, но опять-таки недостаточно, для того, чтобы считать решение пробной задачу Коши решением (3-4). Для еще одного значения $y^0 \equiv y(0)=20$ получается решение, показанное на рис. 4 (справа).

Из сравнения двух правых графиков легко заключить, что недостающее начальное условие больше 15, но меньше 20. Продолжая подобным образом "пристрелку" по недостающему начальному условию y^0, возможно отыскать правильное решение краевой задачи.

В этом и состоит принцип алгоритма стрельбы. Выбирая пробные начальные условия (проводя пристрелку) и решая соответствующую серию задач Коши, можно найти то решение системы ОДУ, которое с заданной точностью удовлетворит граничному условию (или, в общем случае, условиям) на другой границе расчетного интервала.

Если записать сформулированный алгоритм более формально, обозначив функцией $f(y^0)$ невязку выполнения краевого условия на правой (x=1) границе:

$$f(y^0)=R\cdot Y(1)-y(1), \qquad (6)$$

то мы увидим, что суть алгоритма пристрелки свелась к решению алгебраического уравнения

$$f(y^0)=0. \qquad (7)$$

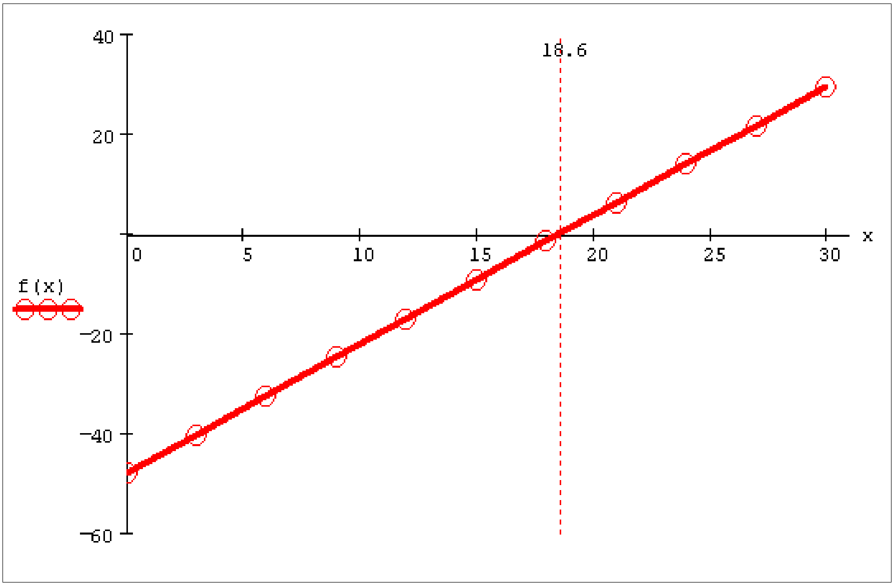

Рис. 5. *Вид функции невязки f(x) (7)*

Решать (7) можно стандартными численными методами (например, секущих или Ньютона), забывая о том, что сама функция $f(y^0)$ задана алгоритмически (через решение соответствующей задачи Коши для системы ОДУ (3) с недостающим «пробным» начальным условием (5). Вид функции $f(y^0)$ показан на рис. 5.

После того, как искомое значение y^0 найдено, остается просто решить соответствующую задачу Коши, с тем, чтобы получить само решение (именно так были построены графики на рис. 2 и 3).

Характерно, что для метода пристрелки нет ограничения на нелинейность ОДУ, однако, он годится только для решения нежестких краевых задач (соответствующие примеры будут приведены ниже).