§1. Постановка задач

Постановка *краевых задач* для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) отличается от задач Коши, рассмотренных в предыдущих главах, тем, что граничные условия ставятся не в одной начальной точке, а на обеих границах расчетного интервала.

Пусть имеется система N обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dx}=f_1(x,y),\\
&\frac{dy_2}{dx}=f_2(x,y),\\
&\ldots\\
&\frac{dy_N}{dx}=f_N(x,y),
\end{aligned} \tag{1}$$

причем, часть из N дополнительных условий поставлена на одной границе интервала, а оставшиеся условия – на противоположной границе:

$$y_i(x=0)=a_i \quad , \quad y_j(x=1)=b_j \quad . \tag{2}$$

В связи с этим, они называются не *начальными* (как в задачах Коши), а *граничными* или *краевыми* условиями.

Несмотря на кажущуюся близость краевых задач для ОДУ к задачам Коши (см. гл. 3 и 4), их решение на компьютере значительно отличается. Алгоритмы решения задач Коши можно отнести к методам *бегущего счета*: для них достаточно, отталкиваясь от известных начальных условий, просто пересчитывать искомые значения функций в узлах сетки через (уже известные) значения в предыдущих узлах.

Для краевых задач это уже не так. Если выписать разностные уравнения, аппроксимирующие ОДУ, то окажется, что неизвестные значения y(x) в узлах сетки связаны посредством системы линейных или (если сама система ОДУ нелинейная) даже нелинейных алгебраических уравнений. Численное решение такой системы представляет собой отдельную, иногда весьма непростую задачу.

Мы рассмотрим два подхода к решению краевых задач на компьютере:

1. Метод пристрелки (фактически, сведение краевой задачи к серии пробных задач Коши).
2. Разностный метод (построение разностных схем и последующее решение систем алгебраических уравнений: мы разберем как линейный, так и нелинейный случай).