

§7. Автоколебания и бифуркация Хопфа

В прошлых разделах мы исследовали, как аналитически, так и численно, аттракторы динамических систем, которые являются неподвижными точками. Приведем пример конкретной динамической системы, которая имеет аттрактор в виде предельного цикла. Отметим, что одна из таких моделей (а именно, Брюсселятор) уже была рассмотрена (см. рис. 1-2).

В качестве примера будем использовать классическую динамическую систему Хопфа, состоящую из двух ОДУ:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \lambda r - r^3 \\ \dot{\varphi} &= c \end{aligned} \quad (64)$$

Система зависит от двух параметров, один из которых λ будет для нас ключевым, а второй параметр $c = \text{const}$. Будем использовать приведенную динамическую систему для функций $r(t)$ и $\varphi(t)$ для определения сложных функций $x(t)$ и $y(t)$, которые выражаются посредством функций $r(t)$ и $\varphi(t)$, как через полярные координаты:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos \varphi \\ y &= r \cdot \sin \varphi \end{aligned} \quad (65)$$

Дополним полученную систему ОДУ начальными условиями:

$$r(t=0) = r_0, \quad \varphi(t=0) = \varphi_0. \quad (66)$$

и решим задачу Коши на компьютере численно для какого-нибудь значения параметра λ , например, $\lambda = 4$. Нарисуем растровые графики $x(t)$, как функции времени t (рис. 30) и отложим их на фазовой плоскости в виде графика $x(y)$ (рис. 31).

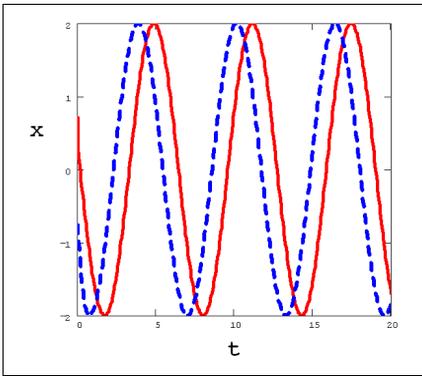


Рис. 30. Решение уравнения Хопфа (64) для $\lambda=4$

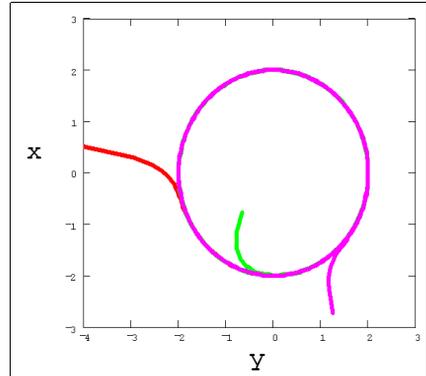


Рис. 31. Решение уравнения Хопфа(64) на фазовой плоскости

Обратите внимание на то, как ведет себя решение: после короткого переходного процесса оно выходит на колебательный режим, что фазовой плоскости обозначается замкнутой кривой.

Теперь решим те же дифференциальные уравнения (64), но с другими начальными условиями. Оказывается, что решение, выходя из другой точки, ведет себя точно так же, быстро выходя на те же колебания. Это иллюстрируется теми же рис. 30 и 31, которые представляют несколько решений, соответствующих различным начальным условиям.

Исключительно важно, что данные асимптотические колебания имеют ту же самую частоту и ту же самую амплитуду, что и для первого решения. Если продолжать экспериментировать, решая задачу Коши со всевозможными начальными условиями, то мы получим ту же самую картину. При $t \rightarrow \infty$ любое решение будет выходить на один и тот же асимптотический колебательный режим.

На фазовой плоскости (рис. 31) всевозможные решения задачи Коши, как бы наматываются на замкнутую кривую. Эта кривая, к которой асимптотически при $t \rightarrow \infty$ стремятся решения задач Коши, является аттрактором и называется *предельным циклом*. Колебательный процесс, описывающий этот предельный цикл, называется *автоколебаниями*. Амплитуда автоколебаний не

зависит от начальных условий и определяется только уравнениями динамической системы.

Решения в виде автоколебаний возможны только в существенно *нелинейных* динамических системах. Динамическая система Хопфа (64) имеет кубическую нелинейность, которая находится в слагаемом τ^3 . Кроме того, дополнительная нелинейность вводится самим определением $x(t)$ и $y(t)$, как функций от $\tau(t)$ и $\varphi(t)$, т.е. выражениями их через тригонометрические функции (65).

Можно показать, что для данной динамической системы амплитуда колебаний в предельном цикле равна $\sqrt{\lambda}$, т.е. зависит от параметра, который входит в динамическую систему. Чем больше значение параметра λ , тем больше амплитуда автоколебаний.

Решим численно ту же самую систему дифференциальных уравнений (64), но для значения параметра $\lambda < 0$. В этом случае предельного цикла существовать не будет, а единственная особая точка, которая в данном случае имеется, является устойчивым фокусом (рис. 32 и 33).

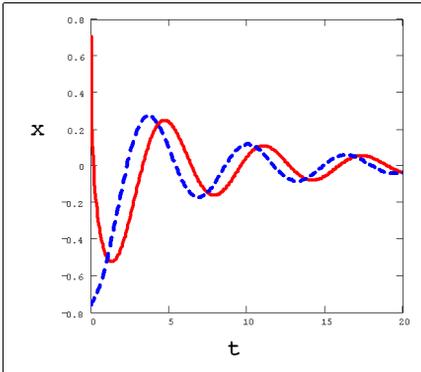


Рис. 32. Решение (64) для $\lambda < 0$

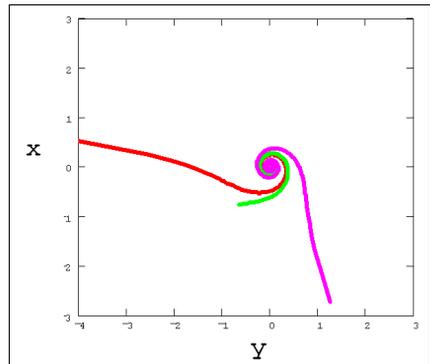


Рис. 33. Решение (64) для $\lambda < 0$
(на фазовой плоскости)

Таким образом, $\lambda=0$ – это бифуркационное значение параметра. В этой точке узел теряет устойчивость, и вместо него рождается устойчивый предельный цикл. Данная бифуркация рождения

устойчивого предельного цикла из неподвижной точки называется *бифуркацией Хопфа*. Заметим, что такое рождение автоколебаний называется *мягким*. При малых значениях параметра λ предельный цикл имеет очень малую амплитуду. Поэтому можно говорить о плавном переходе от неподвижной точки к устойчивому предельному циклу. При дальнейшем увеличении параметра λ он увеличивает свою амплитуду.

Пример: генератор Ван-дер-Поля

В отличие от модели Хопфа, модель Ван-дер-Поля, описывающая динамику электрического тока в некотором контуре:

$$\ddot{y} - \lambda \cdot (1 - y^2) \cdot \dot{y} + y = 0 \quad (67)$$

демонстрирует *жесткое* возбуждение автоколебаний. При прохождении параметра λ через бифуркационное значение, появляются осцилляции ненулевой амплитуды (рис. 34 и 35).

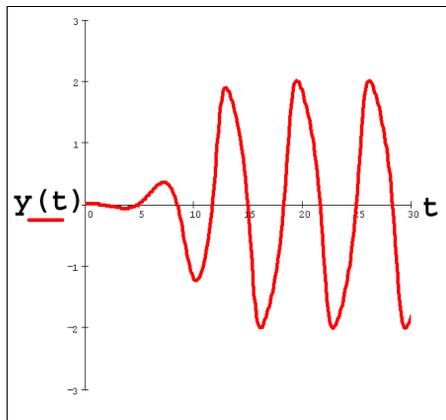


Рис. 34. Решение уравнения (67) Ван-дер-Поля - автоколебания

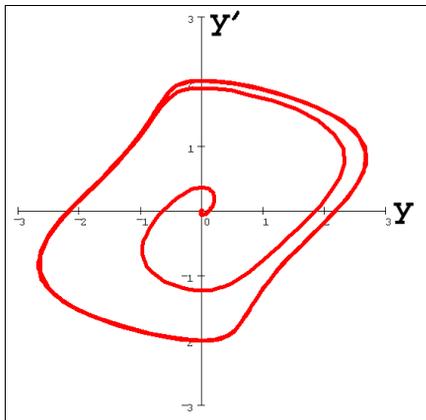


Рис. 35. Решение уравнения (67) на фазовой плоскости

Пример: модель конкуренции трех видов

Вернемся к модели конкуренции трех биологических видов (3.14)

$$\frac{du_i}{dt} = u_i(1 - A_{i1}u_1 - A_{i2}u_2 - A_{i3}u_3), \quad i=1,2,3 \quad (68)$$

и используем следующий вид матрицы A :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & b & a \\ a & 1 & b \\ b & a & 1 \end{pmatrix}. \quad (69)$$

Зафиксируем значение $b=1.5$, ради наглядности, сильно уменьшив количество независимых параметров модели сначала до двух (чисел a и b), а затем и вовсе до одного (параметра a). Изучим, как будет изменяться решение (68) при изменении параметра a от 0 до 1.

На рис. 36 (в виде графика в трехмерном фазовом пространстве) и 37 (в виде растровых графиков и проекции рис. 36 на плоскость u_1-u_2) изображено решение, для $a=0$. Как видно, решение является фокусом, расположенным в точке фазового пространства с координатами $u_1=u_2=u_3=U=0.4$.

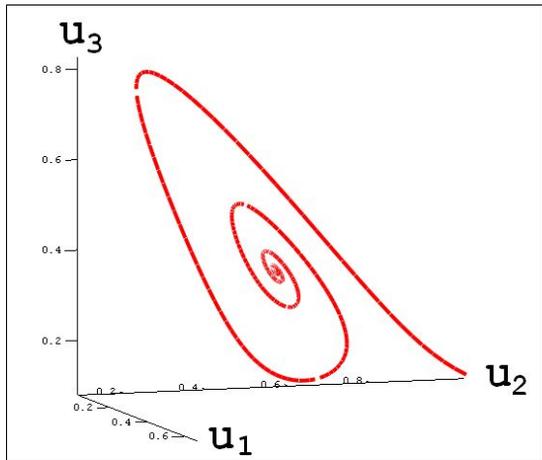


Рис. 36. Аттрактор системы (68) при $a=0$ – фокус

Будем теперь увеличивать значение параметра a и смотреть, как при этом меняется фазовый портрет системы (68).

При увеличении параметра a происходит медленное смещение аттрактора (неподвижной точки типа фокус), в направлении к началу координат фазового пространства. Кроме того, изменяется и скорость стремления решения к данному фокусу: по мере приближения параметра к значению $a=0.5$ затухание колебаний

происходит все медленнее и медленнее. Для $a=0.49$ решение (в тех же обозначениях, что и на рис. 37) изображено на рис. 38.

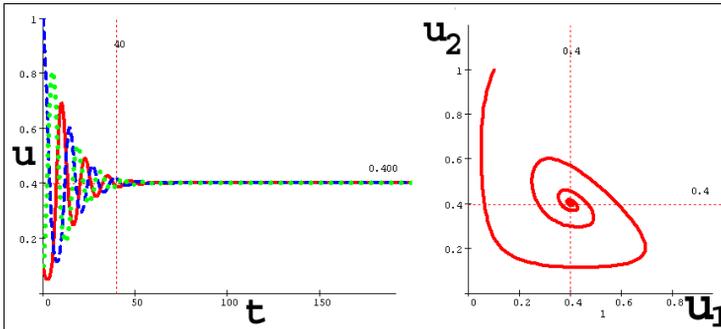


Рис. 37. Решение (68) при $a=0$ (фокус, $U=0.40$)

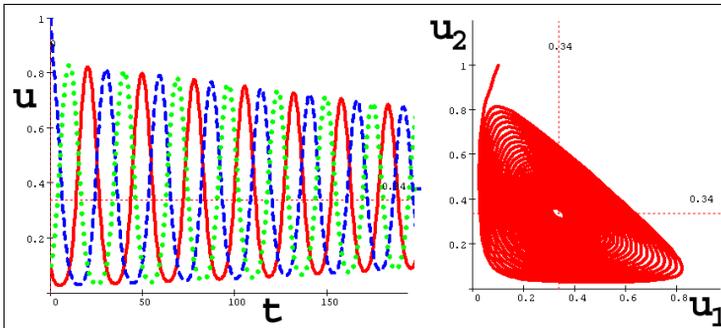


Рис. 38. Решение (68) при $a=0.49$ (фокус, $U=0.34$)

Сказанное иллюстрирует рис. 39, на котором представлен график зависимости положения фокуса U от параметра модели a . По мере увеличения параметра фокус плавно смещается. Наиболее интересное поведение динамической системы происходит как раз в окрестности $a=0.5$. Чем ближе параметр a к этому критическому значению 0.5 , тем медленнее происходит затухание колебаний. Наконец, при $a \geq 0.5$ эти колебания перестают быть затухающими, т.е. вместо аттрактора типа фокус решением динамической

системы становится аттрактор типа предельный цикл (см. рис. 3.10 и 3.11).

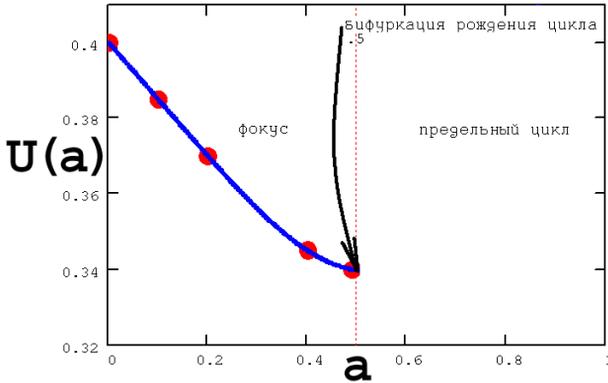


Рис. 39. Зависимость положения фокуса $U(a)$ от параметра модели

Замечательно, что решение для нелинейных моделей, подобных рассмотренной, можно получить только численно, поэтому их изучение стало бурно развиваться с ростом возможностей вычислительной техники в последние полвека. Для надежного исследования фазового портрета, содержащего предельные циклы, необходимо решить систему ОДУ большое количество раз с самыми разными начальными условиями (и, возможно, с разным набором параметров модели), чтобы посмотреть, к каким аттракторам сходятся различные траектории. Отметим, что существуют и специфические методы исследования предельных циклов, изложение которых выходит за рамки данной книги.