

## §6. Бифуркации

Изучая нелинейную динамику, мы с Вами сталкивались со все более сложными численными методами исследования динамических систем. Теперь еще более усложним нашу задачу. Напомним, что динамическую систему мы вводили, по определению, как систему дифференциальных уравнений, зависящих от одного или нескольких параметров  $\vec{\mu}$  :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x, y, \vec{\mu}) \\ \dot{y} &= f_2(x, y, \vec{\mu}) \end{aligned} \quad (56)$$

Чаще всего, фазовый портрет динамических систем исследуется в зависимости от нескольких параметров, т.е. вектора  $\vec{\mu}$ , подобно тому, как мы это делали в примерах двух прошлых параграфов. Особый интерес представляют значения параметров, при которых происходит качественная перестройка фазового портрета.

Как исследуется поведение динамической системы в зависимости от различных значений параметров? Опять предположим, что у нас имеется система двух уравнений, зависящих от одного параметра, т.е.  $\vec{\mu} = \mu$ . Следует выяснить, как себя будет вести портрет динамической системы при изменении этого параметра, например в пределах  $\mu_0 \dots \mu_1$ .

Принцип численного решения такой задачи мы уже рассмотрели на примере усложненного логистического уравнения. Надо разделить диапазон от  $\mu_0 \dots \mu_1$  на некоторое количество отрезков:  $\mu_0 \dots \mu_i \dots \mu_1$ , и на каждом элементарном шаге  $\mu_i$  исследовать фазовый портрет динамической системы. Иными словами, для поиска неподвижных точек для каждого  $\mu_i$  следует решить соответствующую систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} f_1(x, y, \mu_i) &= 0 \\ f_2(x, y, \mu_i) &= 0 \end{aligned} \quad (57)$$

В результате, должны быть получены пары особых точек  $(x^0, y^0)$  как функции параметра  $\mu_i$ .

Такую задачу можно оптимизировать, используя метод продолжения по параметру, который применим, если динамическая система плавно зависит от параметра  $\mu$ .

Предположим, что для начального значения  $\mu_0$  мы определили (с помощью тех или иных численных методов решения нелинейных уравнений) неподвижные точки динамической системы. Для следующего значения параметра  $\mu_1$  предположим, что эти особые точки, определяющие фазовый портрет, изменятся незначительно. Поэтому для запуска численного алгоритма решения нелинейных уравнений в качестве начальной итерации используем корни, вычисленные на предыдущем шаге.

Вообще говоря, для каждого  $\mu_i$  можно построить схему определения неподвижных точек, исходя из решений нелинейных алгебраических уравнений по принципу схемы «предиктор-корректор». Если мы знаем, каковы свойства фазового портрета для предыдущих  $\mu$ :  $\mu_{i-1}$ ,  $\mu_{i-2}$  и т.д., то выгодным представляется экстраполировать их на  $i$ -ю точку. Таким образом, для определения неподвижных точек на каждом  $i$ -м шаге следует использовать двухэтапную процедуру:

- на 1-м этапе строится экстраполяция зависимости неподвижных точек от предыдущих значений параметра  $\mu$  (предиктор);
- на 2-м этапе эта экстраполяция корректируется с помощью решения системы уравнений 
$$\begin{cases} f_1(x, y, \mu) = 0 \\ f_2(x, y, \mu) = 0 \end{cases}$$
 численным методом типа, например, метода Ньютона (корректор).

Если использовать достаточно хорошее приближение к действительному решению, то объем вычислений на компьютере существенно сократится. Такой подход к решению систем нелинейных уравнений называется, как мы уже знаем, *алгоритмом продолжения по параметру*.

Резюмируя, скажем, что использование алгоритма продолжения существенно уменьшает расчеты неподвижных точек для динамических систем, зависящих от параметра. Подчеркнем, что определенные особые точки для каждого значения параметра  $\mu_i$  требуют анализа их устойчивости. На каком-либо из шагов, т.е. для какого-либо  $\mu_i$ , некоторые точки из устойчивых могут становиться неустойчивыми, и наоборот. Когда происходит такое событие, фазовый портрет перестраивается качественно.

Например, если для каких-то  $\mu$  особая точка была неустойчивой, а для определенного  $\mu_i$  она стала устойчивой, то фазовый портрет меняется кардинально. Раньше траектории решения систем динамических уравнений как бы не замечали неустойчивой точки, но, как только она становится устойчивой, траектории из ее окрестности начинают стремиться именно к ней. В этом случае говорят о бифуркации смены устойчивости.

Часто очень важно «отловить» моменты, когда те или иные неподвижные точки меняют тип устойчивости. Поэтому полезно бывает уточнить значение того параметра  $\mu$ , вычислив вместо  $\mu_i$  более точное значение  $\mu^*$ , соответствующее моменту бифуркации. Такую задачу можно решить, опять-таки привлекая алгоритм продолжения по параметру. Только в этом случае решаемая система уравнений будет другой. Напоминаем, что бифуркация соответствует смене знака действительной части одного из собственных значений характеристического уравнения матрицы  $A$ . Обозначим эту действительную часть собственного значения функцией следующих аргументов:

$$\operatorname{Re}(\lambda_k) \equiv F(\mu, x, y). \quad (58)$$

Бифуркация, таким образом, определяется переходом этой функции через 0. Для точного определения момента бифуркации необходимо решить соответствующее нелинейное, заданное алгоритмически, уравнение с неизвестным параметром  $\mu$ . В результате, для определения момента бифуркации следует решать алгоритмом продолжения следующее уравнение:

$$\operatorname{Re}(\lambda_k) \equiv F(\mu, x, y) = 0. \quad (59)$$

Заметим, что, говоря о бифуркационном анализе, мы подразумевали, что динамическая система и фазовый портрет ее решений зависят от параметра  $\mu$  очень просто. Мы не допускали случая, что для каких-то параметров  $\mu$  могут рождаться другие решения, считая, что определенные на нулевом шаге неподвижные точки  $(x^0, y^0)$  для параметра  $\mu_0$ , сохраняются так до конца. На самом же деле, где-то внутри интервала могут появляться и другие решения системы нелинейных уравнений, определяющие неподвижные точки. В этом случае говорят о более сложных бифуркациях (см. следующий разд.).

***Пример: логистическая модель  
(популяция, подвергаемая промыслу)***

Рассмотрим еще один пример из области математической биологии, чтобы проиллюстрировать бифуркационный анализ в многомерном случае. Для этого введем в логистическое уравнение второй параметр:

$$\dot{x} = \mu_1 x - x^2 - \mu_2. \quad (60)$$

Скорость роста популяции описывается параметром  $\mu_1$ , а второй параметр (слагаемое  $\mu_2$ ) моделирует изъятия из популяции определенного числа особей в единицу времени).

Положение аттракторов получившейся динамической системы нам определяется квадратичным алгебраическим уравнением:

$$\dot{x} = \mu_1 x - x^2 - \mu_2 = 0, \quad (61)$$

решение которого опять можно получить аналитически:

$$x_0(\mu) = \frac{\mu_1 \pm \sqrt{\mu_1^2 - 4\mu_2}}{2}. \quad (62)$$

В результате, мы получаем два аттрактора  $x_0(\mu_1)$  и  $x_0(\mu_2)$ . Однако, решение квадратичного алгебраического уравнения существует только, когда его детерминант больше 0:  $\det > 0$ .

Нарисуем на плоскости  $(x, \mu)$  решение этого уравнения, т.е. параболу (рис. 28). На оси абсцисс отложим параметр  $\mu_2$ , а о зависимости от параметра  $\mu_1$  просто будем помнить. При заданном значении параметра  $\mu_1$  будут существовать два аттрактора  $x_0(\mu_2)$ . Но такие два аттрактора будут существовать только до критического значения параметра  $\mu_2$ , в котором  $\det=0$ . Как несложно определить, это критическое значение равно

$$\mu_2^* = \mu_1 / 4. \quad (63)$$

При значениях параметра  $\mu_2 > \mu_2^*$  решения квадратичного уравнения нет, и, соответственно, ни одного аттрактора динамическая система иметь не будет.

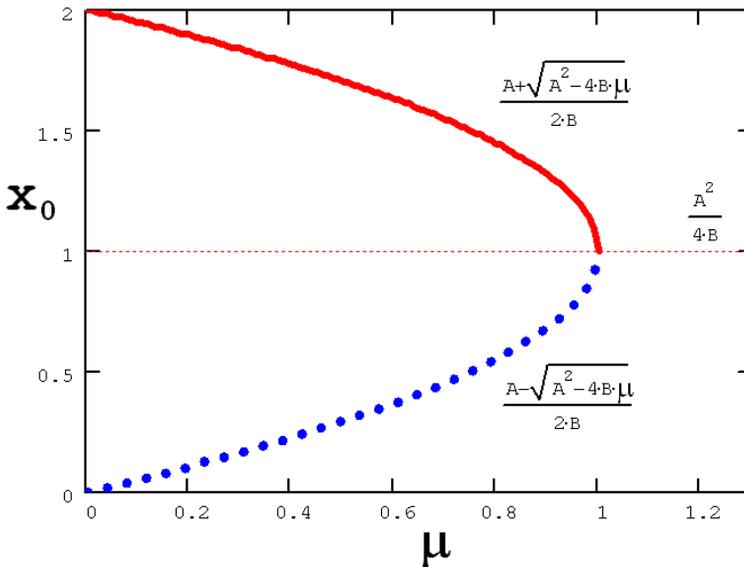


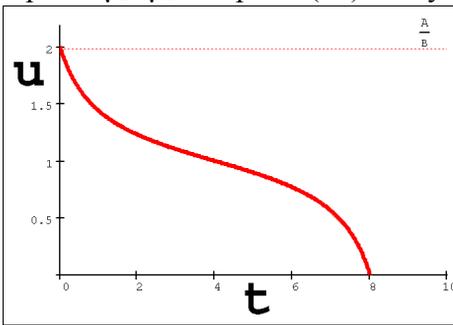
Рис. 28. Аттракторы (60) как функция параметра  $\mu_2$

Как несложно убедиться, один из аттракторов  $x_0(\mu_2)$  является устойчивым, другой неустойчивым (на рис.28 пунктиром показана неустойчивая ветвь). По-прежнему, устойчивый аттрактор соответствует асимптотическому значению численности популяции, несколько сниженной относительно логистической емкости среды. Видно, что, по мере роста

параметра  $\mu_2$ , равновесная численность популяции плавно снижается.

При бифуркационном значении параметра  $\mu_2 = \mu_2^*$  происходит взаимное рождение и смерть устойчивого и неустойчивого аттракторов. Такое поведение, наличие точки рождение/смерти пары аттракторов, очень характерно для динамических систем. Данную бифуркацию называют особенностью типа *складка*. В динамических системах, даже описываемых всего лишь одним дифференциальным уравнением, типа рассмотренного нами, могут существовать еще другие типичные, довольно часто встречающиеся типы бифуркаций.

При  $\mu_2 > \mu_2^*$  корни (61) отсутствуют, и, вместо стремления решения ОДУ (60) к некоторому асимптотическому значению, оно в некоторый момент времени обращается в ноль, а затем принимает (бессмысленные с биологической точки зрения) отрицательные значения (рис. 29). Иными словами, при слишком интенсивном промысле вся популяция вымирает.



**Рис. 29** Решение ОДУ (60) для критического значения  $\mu_2 = 1.1$

Отметим, что динамическую систему с двумя параметрами (60) нам опять удалось решить аналитически. При численном нахождении такого типа бифуркаций посредством продолжения по параметру, при  $\mu = \mu^*$  можно встретиться со следующей трудностью. Попытка определить решение алгебраического уравнения при  $\mu > \mu^*$  ничего не даст, поскольку решения просто нет. Ветвь решения возвращается назад, проходя через точку  $\mu = \mu^*$ . В этом случае следует использовать специальные модификации алгоритма продолжения по параметру (они были обозначены нами в §5).

Резюмируя, следует отметить, что проблема исследования динамических систем, связана с решением нескольких классов задач.

- Во-первых, решение отдельных задач Коши для ОДУ при фиксированных параметрах производится при помощи алгоритмов Рунге-Кутты, Адамса или др.
- Во-вторых, поиск неподвижных точек системы ОДУ сводится к решению (чаще всего, численному) соответствующей системы алгебраических уравнений, т.е. системы с правыми частями исходной системы ОДУ, которые приравнены нулю.
- В-третьих, пользуясь свойством близости решений исходной (нелинейной) системы ОДУ, следует линеаризовать исходную систему в непосредственной окрестности неподвижной точки, разложив искомые функции в ряд Тейлора и оставив в нем только линейные (по  $t$ ) члены.
- В четвертых, уже для линеаризованной системы можно вычислить характеристические числа, определив сразу тип и устойчивость неподвижных точек. Здесь опять возникают задачи численного решения алгебраических уравнений.
- В пятых, описанным способом можно проанализировать зависимость положения аттракторов и их устойчивость от параметров модели, тем самым получив данные о бифуркациях.