

### §3. Типы аттракторов

Очень наглядным образом можно визуализировать расположение аттракторов на фазовой плоскости, во многом благодаря тому, что существует всего несколько их типов, и для них построена четкая классификация.

В прошлом разделе мы говорили о том, как ищутся неподвижные точки динамических систем. Напоминаем, что для этого надо решить соответствующую систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} f_1(x, y, \vec{\mu}) &= 0, \\ f_2(x, y, \vec{\mu}) &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Она была получена путем приравнивания к нулю правых частей уравнений, описывающих динамическую систему (6), т.е.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x, y, \vec{\mu}), \\ \dot{y} &= f_2(x, y, \vec{\mu}). \end{aligned} \quad (22+)$$

Мы также выяснили, что неподвижные точки бывают устойчивыми и неустойчивыми. Если решения притягиваются к неподвижной точке, то она является устойчивой и называется аттрактором. Если решения, взятые сколь угодно близко к неподвижной точке, отталкиваются от нее, то она называется *неустойчивой* или, по-другому, *репеллером*.

Познакомимся, на примере задач вычислительной биологии, с типами аттракторов и репеллеров и узнаем о том, что ими могут быть не только точки, но также и более сложные структуры в фазовом пространстве. Будем откладывать на фазовой плоскости различные типы решений и давать названия соответствующим особым точкам. Если решения динамической системы *асимптотически* стремятся к особой точке, то эта особая точка называется *устойчивым узлом*. Примером узла является решение логистического уравнения. Если траектории решения ОДУ

расходятся подобным образом от особой точки, то ее называют *неустойчивым узлом*.

Помимо типа решения, соответствующего аттрактору типа узла, на больших временах может наблюдаться и другое поведение динамической системы. Если решения  $x(t)$  и  $y(t)$  стремятся к особой точке, при этом осциллируя, то эта особая точка называется *устойчивым фокусом*. По мере увеличения времени осцилляции затухают и становятся все менее заметными, и, соответственно, траектория динамической системы все ближе и ближе приближается к фокусу, как бы накручиваясь на него.

Примером устойчивого фокуса может служить модель осциллятора с затуханием из прошлого раздела. Напомним, что мы рассматривали модель колебания сначала математического, а затем и физического, маятника. Положение равновесия  $(0,0)$  является устойчивым фокусом. Из-за того, что в уравнении маятника присутствует диссипативное слагаемое, колебания затухают и приближаются к состоянию устойчивого равновесия  $(0,0)$ .

Когда особая точка описанного типа неустойчива, то колебания будут расходиться, наращивая амплитуду. Если динамическая система ведет себя подобным образом, но при этом уходит от состояния равновесия, раскручиваясь по спирали, то такую особую точку называют *неустойчивым фокусом*.

Помимо фокуса и узла, существуют неподвижные точки еще одного типа. Рассмотрим их на том же самом примере модели математического маятника:  $\ddot{x} - \gamma \dot{x} + \omega^2 x = 0$ . Если рассматривать маятник без затухания:  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ , то колебания, начавшись в некоторой точке, в которой изначально был отклонен маятник, будут продолжаться бесконечно.

Если маятник изначально был отклонен на малый угол, т.е. начальные условия соответствующей задачи Коши немного отличались от точки равновесия  $(0,0)$ , то фазовым портретом будут колебания малой амплитуды. Соответственно, если

начальные условия дальше отстоят от точки равновесия, то решение будет отображаться в виде колебаний большей амплитуды.

Как Вы видите, имеется семейство решений, которые существенно зависят от начальных условий. В центре этого семейства решений находится особая точка  $(0,0)$ . Естественно, что это неподвижная точка, поскольку она является решением соответствующей системы алгебраических уравнений. Если маятник без затухания будет находиться изначально в этой точке, то он в ней останется в течении бесконечного времени. Такую особую точку называют *устойчивым центром*. Сами динамические системы, которые ведут себя подобным образом, т.е. колебания которых определяются начальными условиями, называются *негрубыми*.

Мы уже неоднократно говорили о том, что особые точки бывают как устойчивыми, так и неустойчивыми. Однако, даже в случае двух функций  $x(t)$ ,  $y(t)$ , т.е. фазового портрета на плоскости, может наблюдаться чуть более сложное сочетание. Одна и та же особая точка может быть устойчива, например, по  $x(t)$ , и неустойчива по  $y(t)$ . Такую особую точку называют *седлом*.

Помимо неподвижных точек на фазовой плоскости, существуют и более сложные аттракторы и репеллеры. В частности, траектория решения динамической системы может стремиться не к какой-то точке, а к некоторому циклу. В этом случае, независимо от начальных условий, динамическая система на бесконечных временах выходит на определенные колебания. В. Аттракторы такого типа называются *устойчивым предельным циклом*. Примерами динамических систем с предельным циклом являются модель трехвидовой конкуренции и модель брюсселятора (см. §1).

Обратим Ваше внимание на самое важное отличие предельного цикла от простейших колебаний, типа рассмотренных нами колебаний маятника. Колебания маятника существенно зависят от начальных условий. Начальная амплитуда маятника при

отсутствии затухания сохраняется на протяжении всего времени колебаний. Если движение маятника начинается с некоторой амплитудой, то такая амплитуда колебаний сохранится до бесконечности.

Для решения в виде предельного цикла все совсем наоборот. Какое бы начальное условие мы ни взяли, все равно динамическая система придет к предельному циклу с определенной, наперед заданной, амплитудой и частотой. Более подробно особенности такого поведения динамических систем будут рассмотрены на примере модели генератора Ван дер Поля. (см §7). Отметим, что предельный цикл, как и другие аттракторы, может быть как устойчивым, так и неустойчивым.

Системы из двух ОДУ с двумя неизвестными функциями  $x(t)$ ,  $y(t)$ , могут иметь только те типы аттракторов и репеллеров, которые мы перечислили. Если динамическая система включает количество неизвестных функций большее двух, то могут появляться и аттракторы другого типа – хаотические колебания, примером которых является аттрактор Лоренца (см. §8).

Приведем теперь несколько примеров аттракторов - неподвижных точек из области вычислительной биологии.

### ***Пример: симбиоз (узел и седло)***

Вернемся к динамической системе симбиоза (3.13), описываемой системой двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(A_1 - B_{11}x + B_{12}y), \\ \dot{y} &= y(A_2 + B_{21}x - B_{22}y). \end{aligned} \tag{23}$$

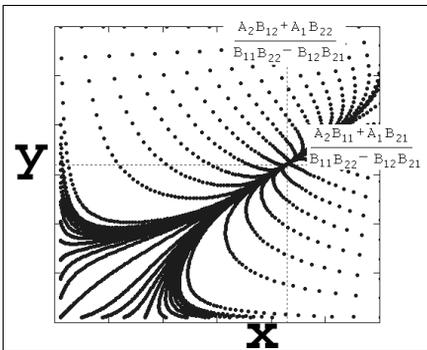


Рис. 11. Фазовый портрет системы симбиоза (узел)

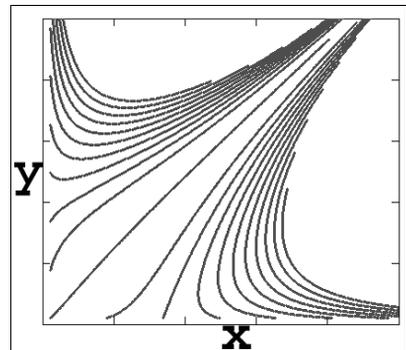


Рис. 12. Фазовый портрет (13) (неустойчивый случай)

Рассмотрим на этом примере, как выглядит фазовый портрет особой точки типа устойчивый узел. Для этого зафиксируем значения всех параметров модели и построим (численным методом, например, Рунге-Кутты) на фазовой плоскости семейство решений для всевозможных (ненулевых) начальных условий. Такой график показан на рис. 11. Он свидетельствует, что все, отложенные на нем решения, сходятся при увеличении  $t$  к одной точке, координаты которой выделены пунктиром. Их, кстати говоря, легко получить аналитически (соответствующие значения координат этой точки также подписаны на графике). (рис. 11).

Если изменить определенным образом набор параметров модели (точнее, взяв высокий коэффициент роста видов и низкую смертность), то можно получить неустойчивые решения (23), которые неограниченно возрастают при увеличении  $t$  (рис. 12).

Хочется обратить внимание на стиль построения графика решений на фазовой плоскости (рис. 11-12). Решение, полученное численным методом в форме сеточной функции, отображается точками, каждая из которых соответствует определенному моменту времени. Таким образом, по графику на фазовой плоскости можно косвенно судить и о скорости изменения функций  $x(t)$  и  $y(t)$ . Иными словами, такое представление

позволяет (хотя и не в полной мере) визуализировать временную зависимость искомым функций.

Отыщем теперь аттракторы системы симбиоза. Если приравнять правые части системы дифференциальных уравнений (23) нулю, то полученная система обыкновенных (алгебраических) уравнений будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} x(A_1 - B_{11}x + B_{12}y) &= 0, \\ y(A_2 + B_{21}x - B_{22}y) &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Ее решение (для некоторой комбинации параметров) показано на рис. 13 в виде точек на плоскости  $(x, y)$ . Как показывают несложные аналитические выкладки, неподвижных точек здесь четыре: *неустойчивый* узел в начале координат, *седловая точка* на оси ординат и седловая же точка на оси абсцисс, а также четвертая точка – *устойчивый* узел (см. рис. 11).

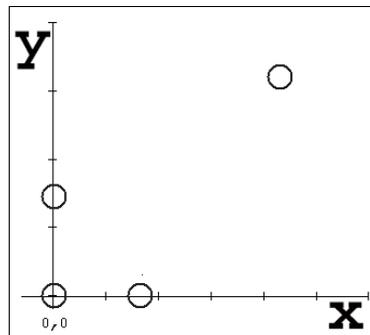


Рис. 13. Аттракторы системы симбиоза (23)

### **Пример: «хищник-жертва» (центр)**

Вернемся теперь к модели Вольтерра (3.12), которая была рассмотрена в главе 3:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1 x - D_{12} x y, \\ \dot{y} &= -D_2 y + A_{21} x y. \end{aligned} \quad (25)$$

Как несложно убедиться, решая (25) при различных начальных условиях, фазовый портрет этой системы (рис. 14) представляет собой концентрические замкнутые кривые, окружающие одну стационарную точку типа *центр*.

Как видно, модельные колебания численности обеих популяций существенно зависят от начальных условий – после каждого периода колебаний система возвращается в ту же точку. Динамические системы с таким поведением, как мы уже говорили, называют *негрубыми*.

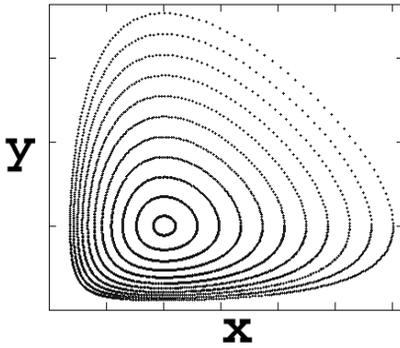


Рис. 14. Фазовый портрет системы «хищник-жертва»

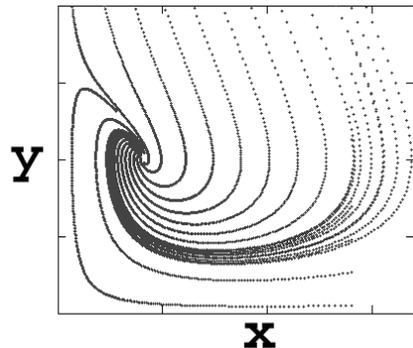


Рис. 15. Система «хищник-жертва» с конкуренцией»

**Пример: модель «хищник-жертва»  
с конкуренцией среди жертв (фокус)**

Поскольку считается, что негрубые модели экологически не адекватны, т.к. амплитуды их циклов определяются начальными условиями, то возникло стремление подправить модель «хищник-жертва» так, чтобы негрубость ушла, а колебания остались. Одна из таких попыток сводится к добавке в уравнение для жертвы в формуле (25) внутривидовую конкуренцию в виде отрицательно-квадратичного слагаемого ( $-Vx^2$ ).

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_1 x - D_{12} x y - Vx^2, \\ \dot{y} &= -D_2 y + A_{21} x y.\end{aligned}\tag{26}$$

Фазовый портрет системы (26) изображен на рис.15. Он имеет одну стационарную точку (аттрактор), на которую «накручивается» решение. В теории динамических систем аттрактор такого типа называется *фокусом*.

К сожалению, попытка введения в модель «хищник-жертва» конкурентной борьбы среди жертв приводит к колебаниям, но, увы, быстро затухающим, что в реальных биологических сообществах не наблюдается (на рис. 15 приведен случай малого параметра конкуренции  $V$ , который все равно приводит к затуханию колебаний численности и установлению устойчивого стационарного решения).

Отметим в заключение, что, во-первых, все рисунки для фазовых портретов примеров были получены численным методом (путем решения серии задач Коши для разных граничных условий). Во-вторых, колебания, описываемые системами (25) и (26), т.е., соответственно, незатухающие и затухающие, являются *негармоническими* в силу *нелинейности* этих моделей. Напротив, классические линейные модели осциллятора, приводят к линейным (гармоническим) колебаниям, аналитические решения для которых известны и выражаются через тригонометрические функции.

