

§1. О динамических системах

Динамическими системами принято называть класс задач, связанных с определением временной зависимости некоторого параметра, в частности, представленных *задачами Коши* для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Мы уже очень подробно говорили о решении ОДУ, а сейчас обратимся к специфическим методам исследования их подкласса – динамических систем, которыми будем называть систему ОДУ типа

$$\dot{x}_i = f_i(\vec{x}), \quad i=1 \dots N. \quad (1)$$

Любая из функций f_i может зависеть от любых $x_i(t)$, т.е. вектора $\vec{x}(t)$, а также других аргументов, в частности от времени t (в последнем случае динамическая система уравнений называется *неавтономной*):

$$\dot{x}_i = f_i(\vec{x}, t). \quad (1+)$$

Чаще в теории динамических систем рассматриваются *автономные* системы (1), которые не содержат в качестве явной зависимости аргумент времени t . Кроме того, в качестве аргументов функций f_i , что очень характерно для большинства практически интересных динамических систем, часто присутствуют различные параметры, которые мы обозначим вектором $\vec{\mu}$:

$$\dot{x}_i = f_i(\vec{x}, t, \vec{\mu}). \quad (2)$$

Динамическая система может зависеть параметрически как от одного такого числа μ , так и от двух и более параметров. Помимо самих уравнений, число которых в общем случае равно N , должно быть поставлено N начальных условий:

$$x_i(t) = a_i. \quad (3)$$

На практике, помимо простого отыскания решения $\vec{x}(t)$, возникают также и другие задачи, более важные и сложные.

Проблеме простого численного интегрирования отдельной задачи Коши была посвящена целая глава о дифференциальных уравнениях (см. гл. 3). В рамках данной главы мы рассмотрим дополнительные задачи, которые возникают при исследовании динамических систем.

Наиболее часто встречается следующий вопрос: как будет вести себя решение $x_i(t)$ при изменении параметра или группы параметров μ . При плавном изменении μ решение может меняться как количественно, так и качественно, перестраиваясь при определенных значениях μ практически до неузнаваемости. В этой связи, зачастую, важно знать даже не саму структуру функции $x_i(t)$, а лишь то, как она себя будет вести при больших временах, т.е. при $t \rightarrow \infty$.

Задача может ставиться максимально широко: как при *всевозможных* начальных условиях поведет себя решение при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, исследование динамических систем связано с решением не единственной задачи Коши, а целого семейства, зачастую огромного, задач Коши. Решение одной задачи Коши – это хорошо изученный и прекрасно отлаженный процесс. Здесь нет никаких проблем для большинства систем, если они к тому же не являются жесткими, алгоритмы решения которых разработаны весьма давно, очень эффективны и не представляют сложности в применении. Но, если с помощью данных алгоритмов предстоит решить сразу большое количество задач Коши и оценить большой объем информации, нужны другие методы исследования.

Исходя из специфики задач о динамических системах, часто бывает более удобным рисовать решение не в виде растрового графика $\vec{x}(t)$, а в *фазовом пространстве* (см. §3.2). Если мы рассмотрим N -мерное пространство и отложим вдоль каждой из координатных осей свою функцию $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$, то получим пространство, называемое *фазовым пространством*.

Зависимость от времени будет исключительно параметрической, поскольку при таком рассмотрении изучается, как будут связаны

$x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_N(t)$ на ветвях решения. Некоторая информация при этом, конечно, потеряется. В частности, мы не будем знать динамику изменения решений x_1 со временем t . Но зато выиграет наглядность, в особенности из-за того, что на одном и том же графике фазового пространства можно отложить несколько решений задач Коши, каждое из которых будет задаваться соответствующей кривой, начинающейся в точке $\vec{x}(0)$, определяемой начальными условиями.

Если рассматривается система всего двух уравнений, то $N=2$, и, соответственно, фазовое пространство является просто координатной плоскостью, на которой откладываются решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Этот случай наиболее нагляден. Если количество уравнений $N=3$, то, соответственно, фазовое пространство является трехмерным пространством. При $N>3$ наглядность представления фазового пространства теряется. В этом случае принято строить те или иные проекции фазового пространства на плоскость или же на трехмерную поверхность. Кроме того, имеются дополнительные способы визуализации, которые связаны с представлением отображения Пуанкаре.

Множество решений, вычисленных для всевозможных начальных условий и отложенных на фазовой плоскости, образует *фазовый портрет* динамической системы. Каждое решение, выходя из точки, координаты которой являются начальными условиями, отображается отдельной линией на фазовом портрете. С вычислительной точки зрения, задача исследования фазового портрета часто сводится к обычному сканированию семейств решений ОДУ для разных начальных условий.

Фазовый портрет динамической системы представляет информацию обо *всех* точках, к которым сходится при $t \rightarrow \infty$ решение динамической системы (в том числе, и неустойчивых) и даже, более того, о *качественном характере решения* вблизи этих точек. В частности, возвращаясь, к системе симбиоза (3.13), надо отметить, что она имеет не одну, рассмотренную нами, а целых четыре таких точки (см. рис. 13 ниже).

Пример: брюсселятор

В качестве примера, подчеркивающего значимость фазового портрета для визуализации решения ОДУ, приведем классическую модель *брюсселятора*, предложенную в 1968 г. Лефевром и Пригожиным:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= -(\mu + 1) \cdot u_1 + u_1^2 \cdot u_2 + 1, \\ \frac{du_2}{dt} &= \mu \cdot u_1 - u_1^2 \cdot u_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Эта модель описывает некоторую автокаталитическую химическую реакцию, в которой определенную роль играет диффузия. Неизвестные функции $u_1(t)$ и $u_2(t)$ отражают динамику концентрации промежуточных продуктов химической реакции. Параметр модели μ имеет смысл исходной концентрации катализатора (третьего вещества). Рис. 1 и 2 представляют два графика фазового портрета, рассчитанных для разных значений параметра μ .

Как видно из рис. 1, при $\mu=0.5$ все траектории, вышедшие из разных начальных условий, асимптотически стремятся к одной и той же точке $(1, 0.5)$. Для другого значения параметра $\mu=2.5$ траектории стремятся уже не к точке, а к замкнутой кривой в фазовом пространстве, называемой *предельным циклом* (рис. 2). Соответственно, решения $u_1(t)$ и $u_2(t)$ будут иметь характер осцилляций, называемых *автоколебаниями*.

Отметим, что графики на рис. 1 и 2 показаны в виде семейств точек, что дает возможность визуализировать и характер временной зависимости решения (т.е. скорость его стремления к аттрактору). Конечно, в общем случае, при анализе фазового портрета желательно «прощупать» большее число траекторий, задавая более широкий диапазон начальных условий. В общем случае, не исключено, что в других областях фазовой плоскости траектории будут сходиться к другим аттракторам.

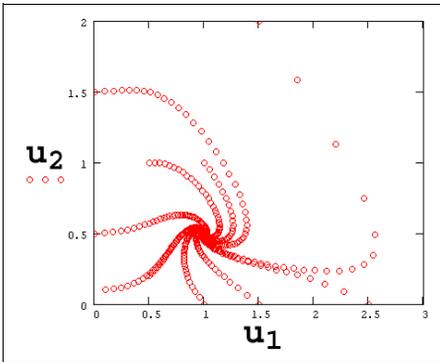


Рис. 1. Фазовый портрет брюсселятора при $\mu=0.5$ (узел)

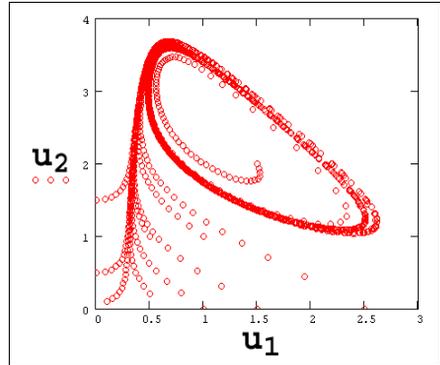


Рис. 2. Фазовый портрет брюсселятора при $\mu=2.5$ (предельный цикл)

Более детально, эволюцию фазового портрета брюсселятора можно наблюдать, проводя расчеты с различным параметром μ . При его увеличении узел будет сначала постепенно смещаться в точку с координатами $(1, \mu)$, пока не достигнет *бифуркационного* значения $\mu=2$. В этой точке происходит качественная перестройка портрета, выражающаяся в рождении предельного цикла. При дальнейшем увеличении μ происходит лишь количественное изменение параметров этого цикла.