§1. О постановке задач Коши для ОДУ

Обыкновенными дифференциальными уравнениями – сокращенно, *ОДУ*, называются такие уравнения, в которых неизвестными являются некоторые функции, например, y(t), причем эти уравнения содержат ее производные, например 1-ю производную y'(t).

Прежде всего заметим, что дифференциальные уравнения делятся на две большие группы: *обыкновенные дифференциальные уравнения* и *уравнения в частных производных*. Обыкновенные дифференциальные уравнения – это уравнения, в которые входят производные только по одной переменной – $\frac{dy(x)}{dx}$. *Уравнения в частных производных* содержат производные по различным переменным – $\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}, \frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$.

Обыкновенные дифференциальные уравнения решить как численно, так и аналитически, несравненно проще, нежели уравнения в частных производных. Однако, и в ОДУ имеется много неочевидных вопросов, о некоторых из которых речь пойдет в этой главе.

Постановка задачи отыскания решения ОДУ заключается в приравнивании к нулю некоторого соотношения, включающего производные (вообще говоря, различных порядков) от искомой функции y(x):

$$F\left(y(x), \frac{dy(x)}{dx}, \frac{dy^2(x)}{dx^{2,}} \ldots\right) = 0 \quad . \tag{1}$$

Наиболее часто встречаются уравнения, которые имеют вид

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y) \quad , \tag{2}$$

называемый *стандартной формой*, или *формой Коши*.

Таким образом, искомым объектом в ОДУ является не число (как в алгебраических уравнениях), а некоторая функция y(x). Из теории дифференциальных уравнений известно, что для того, чтобы ОДУ имело решение, необходимо поставить начальные и граничные условия. Подробнее о начальных и граничных условиях мы поговорим при разборе конкретных примеров.

Задачу решения ОДУ, в которые входят производные высших порядков, можно, как известно, свести к системе ОДУ с одной производной. Для этого следует обозначить другими неизвестными функциями, например: $y_1(x), y_2(x),...$ сами производные функции y(x). В результате вместо одного уравнения для различных производных функции y(x) мы получим *систему ОДУ* для векторной функции **y**(x). В этой векторной функции компоненты y_1, y_2 и т.д. (по количеству производных высших порядков) являются искомыми функциями переменной x, т.е. требуется отыскать все эти функции – $y_1(x)$, $y_2(x)$ и т.д.

Наиболее простая постановка задач для ОДУ – это постановка задач с *начальными условиями*. Для того, чтобы система ОДУ имела решение, необходимо задать некоторые начальные условия в точке x=0, или в некоторой точке $x=x_0$, с которой начинается интегрирование ОДУ. Иными словами, для корректной постановки задачи с начальными условиями (по-другому, *задачи Коши*) следует задать N уравнений в виде:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt} &= f_1\,(y_{1,}\, y_{2,} \ldots, y_N, x),\\
\frac{dy_2}{dt} &= f_2\,(y_{1,}\, y_{2,} \ldots, y_N, x),\\
\frac{dy_N}{dt} &= f_N(y_{1,}\, y_{2,} \ldots, y_N, x),
\end{aligned}
\tag{3}
$$

а также начальные условия:

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_N(x). \tag{4}$$

Задачу Коши для системы ОДУ (3) можно интерпретировать как задачу отыскания неизвестной *векторной* функции **y**(x), включающей несколько (N) неизвестных функций $y_1(x)$, ... , $y_N(x)$. Соответственно числу компонент векторной функции **y**(x), для правильной формулировки задачи, должно быть поставлено N начальных условий, т.е. задан начальный вектор **y**(x=0)=**C**.

Иными словами, отправляясь из некоторой нулевой точки, определяемой начальными условиями, необходимо отыскать всю динамику изменения функции y(x). (рис. 1).

Исходя из физического смысла такой постановки, можно, не теряя общности, полагать, что дифференциальные уравнения содержат производные по аргументу t, являющемуся временем, и, соответственно, описывают динамику во времени различных параметров **y**(t). Поэтому постановка задач Коши для ОДУ определяет широко известный класс задач, называемых *динамическими системами*. В результате решения ОДУ для этих функций должна получится временная зависимость **y**(t). В дальнейшем мы приведем большое количество динамических систем, которые описывают классические модели.

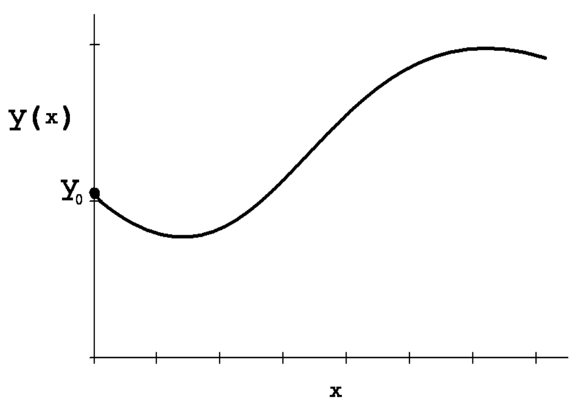

Рис. 1. *К решению задачи (5-6)*

С вычислительной точки зрения, решение задач Коши для систем ОДУ мало чем отличается от решения одного уравнения. Поэтому будем рассматривать единственное уравнение

$$\frac{dy(t)}{dt}=f(t,y) \quad , \qquad (5)$$

а также единственное начальное условие

$$y(0)=y^0. \tag{6}$$

Здесь и далее (на протяжении двух глав книги) будем полагать, что координата, по которой выполняется дифференцирование, является временем t, а сама функция ищется в виде динамической зависимости y(t). Мы научимся решать уравнение (5) различными методами, а потом скажем несколько слов о том, как распространить эти алгоритмы на решение систем ОДУ. Однако, перед этим, дабы не быть голословными, приведем два примера из области математической биологии, которые позволят нам лучше ориентироваться в рассматриваемом круге задач. Заметим попутно, что вычислительная биология, а также химическая кинетика, являются исключительно яркими иллюстрациями динамических систем, поскольку допускают простую и понятную физическую интерпретацию (динамику численности особей в биологических популяциях или концентрации реагентов в химических реакциях).

Пример: логистическое уравнение

Простейшая модель вычислительной экологии описывает развитие биологической популяции с внутривидовой конкуренцией и представляется единственным ОДУ:

$$\frac{du}{dt}=Au-Bu^2 \quad . \tag{7}$$

Данная модель, называемая *логистической*, была предложена П.Ферхлюстом и Р.Перлом. Динамика численности популяции u описывается обыкновенным дифференциальным уравнением (7), где коэффициент A определяет скорость роста популяции (представляя собой разность между естественным приростом и смертностью). Коэффициент B=const описывает внутривидовую конкурентную борьбу.

Подчеркнем, что неизвестной в уравнении (7) является *функция* u(t), а числа A и B – это параметры модели. Поскольку в уравнение входит производная функции u только по одной переменной (времени t), то данное соотношение является *обыкновенным дифференциальным уравнением* (ОДУ).

Для того, чтобы правильно определить *задачу Коши*, надо, кроме самого уравнения, задать дополнительно и *начальное условие* $u(t=t_0)$. Т.к. мы имеем дело не системой, а с одним уравнением, т.е. N=1, то следует определить единственное начальное условие. Не теряя общности, можно полагать $t_0=0$, что позволит нам решать поставленную задачу в интервале $t=(0,\infty)$:

$$u(t_0=0)=u_0=\text{число}. \qquad (8)$$

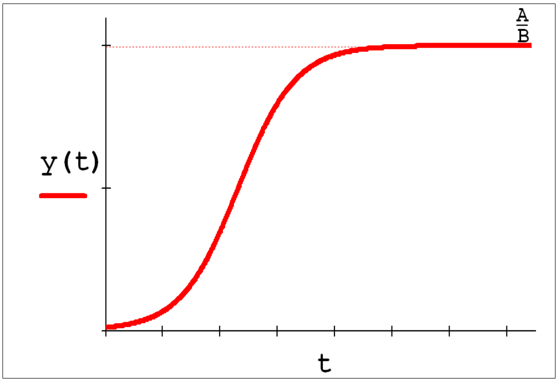

Рис. 2. *Решение уравнения (7)*

Теперь, не вдаваясь в объяснение общих принципов решения ОДУ, сразу приведем решение уравнения (7) с начальным условием (8) $u_0=0.01$ и параметрами A=B=1 (рис. 2).

При малых u (т.е. когда выполняется соотношение $Bu^2 \ll Au$) логистическое уравнение описывает почти экспоненциальное увеличение численности популяции. Такой быстрый рост соответствует, например, бурному развитию молодой популяции, повсеместно наблюдаемому в природе.

Очевидно, что неограниченное возрастание биомассы невозможно. Начиная с некоторого момента, оно будет тормозиться в результате недостатка ресурса и конкуренции внутри популяции. Поэтому многие популяции, попав в новое место обитания, обнаруживают характерный S-образный рост численности.

В природе, как правило, максимальная плотность любой популяции, ограничена сверху определённой величиной u_{max}, называемой *ёмкостью среды*, описывающей равновесное значение биомассы u_{max}=A/B. Известно огромное количество экспериментальных подтверждений логистической модели. Развитие разнообразных популяций, как простейших микроорганизмов, так и высших животных и растений укладывается в эту схему. А именно, при малой исходной плотности биомассы u_0 начальный рост популяции будет почти экспоненциальным с показателем экспоненты A. Поэтому его иногда называют «*биотическим потенциалом*» популяции, т.е. максимальными возможностями роста численности при самых благоприятных внешних условиях. Экспоненциальный рост означает, что в самом начале развития популяция растёт медленно (du/dt мало), но, по мере увеличения ее размеров (с ростом u), скорость роста увеличивается .

Пока популяция достаточно мала, ее отдельные представители не оказывают друг на друга значительного влияния. Однако, при некоторой промежуточной плотности биомассы начинают сказываться тормозящие эффекты, такие, как внутривидовая конкуренция. В результате, рост популяции замедляется, стремясь к асимптотическому значению u_{max}, определяемому внешними условиями существования.

Пример: конкуренция 2-х видов

Приведем теперь пример динамической системы, представленной системой двух ОДУ. Для этого усложним логистическую модель (7), введя в рассмотрение динамику двухвидовой популяции с численностями u_1, u_2:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= A_1\, u_1\left(1-\frac{u_1}{u_1^{max}}-A_{12}\frac{u_2}{u_2^{max}}\right), \\ \frac{du_2}{dt} &= A_2\, u_2\left(1-\frac{u_2}{u_2^{max}}-A_{21}\frac{u_1}{u_1^{max}}\right). \end{aligned} \qquad (9)$$

Отличие каждого из уравнений, входящих в систему (9), от логистической модели (7) заключается в появлении новых слагаемых, а, точнее, тех, что содержат множители A_{12} и A_{21} соответственно и описывают отрицательное влияние на рост популяции его конкурента. Влияние будет тем более сильным, чем больше размер популяции вида - конкурента.

Для правильной постановки задачи Коши следует, дополнительно к уравнениям (9), определить уже не одно, как в (7), а два (по числу уравнений N=2) начальных условия:

$u_1(t_0=0)=u^0_1$, $u_2(t_0=0)=u^0_2$. (10)

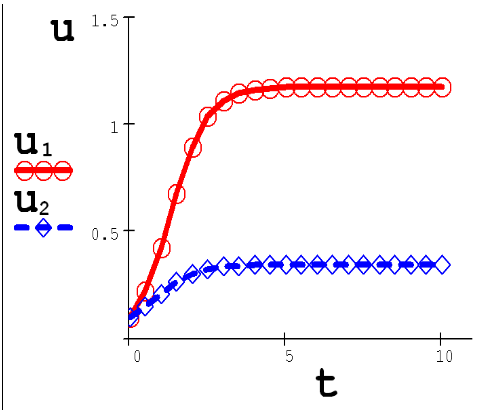

Рис. 3. *Решение системы (9-10)*

Решения системы ОДУ (9) с начальными условиями (10) показаны на рис. 3. График демонстрирует характерное асимптотическое поведение численности конкурирующих популяций, выражающееся в установлении (по истечении времени роста) определенных равновесных значений.

Смысл параметров $u_{1,2}^{max}$ вполне прозрачен. Они представляют емкость среды для каждого из двух видов по отдельности, т.е. максимальное значение, устанавливающееся для одного вида в отсутствие другого. Например, если принять $u_1(0)=u^0_1=0$, то решениями системы (9) будут функции, показанные на рис. 4. Первая из них на всем расчетном промежутке времени будет тождественно равна нулю, а вторая – выходить на больших временах на асимптотическое значение u_2^{max}. Аналогично, если взять $u^0_2=0$, то u_1 будет стремиться при $t\to\infty$ к емкости среды для первого вида u_1^{max}.

Возможно, Вы обратили внимание, что решение дифференциального уравнения сводится, фактически, к его интегрированию. Ведь само дифференциальное уравнение (5), (7) или (9) можно просто проинтегрировать, записав, что искомая функция равна

$$y(t)=y_0+\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt \quad . \qquad (11)$$

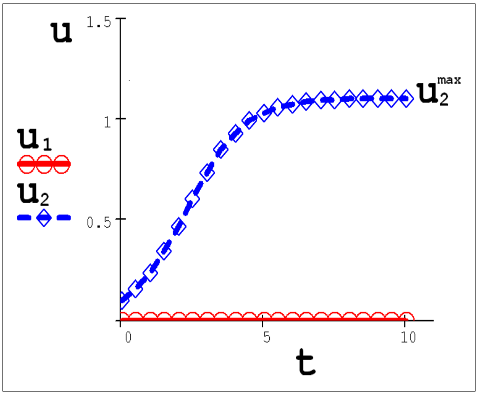

Рис. 4. *Решение системы (9-10) с начальным условием u_1=0*

Вычислив интеграл (11) с переменным верхним пределом, мы получим решение нашего дифференциального уравнения y(t). Поскольку мы говорим исключительно о численных алгоритмах решения, то нас должно удовлетворить нахождение искомой функции y(t) в ряде точек сетки (называемых *узлами*), отличающихся друг от друга по времени t на шаг Δ. Посчитав подобным образом интегралы в пределах от 0 до Δ, потом 0..2Δ, 0...3Δ и т.д., мы получим искомые значения функции y(Δ), y(2Δ), y(3Δ),.... Конечно, считать каждый интеграл заново совершенно неэкономично. Поэтому, для решения ОДУ развиты различные алгоритмы численного решения (речь о них пойдет ниже).