§3. Некорректные задачи

При решении обратных задач важную роль играет их *устойчивость*. Задача

$$\mathbf{Ay}+\boldsymbol{\sigma}= \mathbf{b} \tag{27}$$

(**A** – некоторый оператор, не обязательно линейный) *устойчива по правой части*, если малым флуктуациям правых частей **b** соответствуют малые флуктуации решения **y**. Иными словами, устойчивость состоит в требовании, чтобы решения близких задач $\mathbf{Ay}+\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{b}$ и $\mathbf{Ay}+\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{b}+\boldsymbol{\delta}\mathbf{b}$ мало отличались друг от друга. Если задача изначально является неустойчивой, то решать ее нет никакого смысла, поскольку погрешности алгоритмов, накапливающиеся в ходе решения численными методами, неизбежно приведут к тому, что будет найдено неверное решение.

Как правило, обратные задачи характеризуются наличием шумов, что учтено в (27). Повторимся, мы предполагаем, что шум $\boldsymbol{\sigma}$ входит в схему измерений линейно, а оператор **A**, возможно нелинейный, описывает физическую модель измерений.

В реальных задачах экспериментальной физики шум может быть довольно существенным. Его наличие коренным образом меняет идеологию решения обратных задач. Если сама задача (описываемая оператором **A**) является устойчивой, то существование шума может эту устойчивость нарушать. Попросту говоря, различные (даже очень сильно отличающиеся) сигналы $\mathbf{y}_1$ и $\mathbf{y}_2$ могут приводить к очень похожим измерениям $\mathbf{b}_1 \approx \mathbf{b}_2$. Поэтому встает вопрос, можно ли извлечь из измерений полезную информацию о сигнале, если наличие шума делает задачу неустойчивой? Такие задачи называются задачами, поставленными некорректно (*некорректными задачами*). Для их решения развиты специальные методы, основанные, главным образом, на привлечении дополнительной априорной информации о решении **b** и / или шуме $\boldsymbol{\sigma}$.

Следует заметить, что класс некорректных задач шире класса обратных (см. диаграмму на рис. 11). Классический пример некорректной задачи для уравнения в частных производных – это обратное уравнение теплопроводности (см. §6.5).

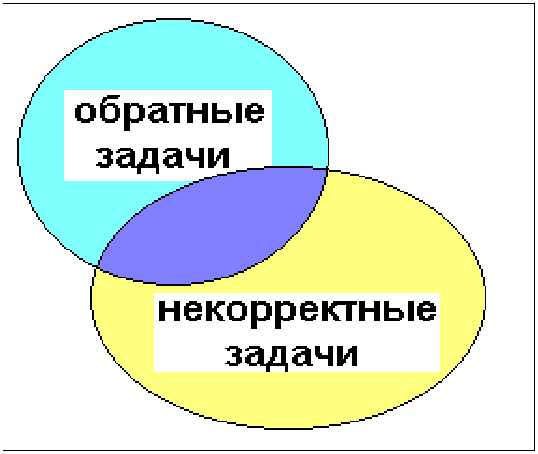

Рис. 11. *Классы обратных и некорректных задач*

Понятие некорректности иллюстрируют рис. 12 и рис. 13, на которых представлена попытка решения обратной задачи (6) для модели «сигнал – шум» (из §1) «в лоб», прямым обращением матрицы А.

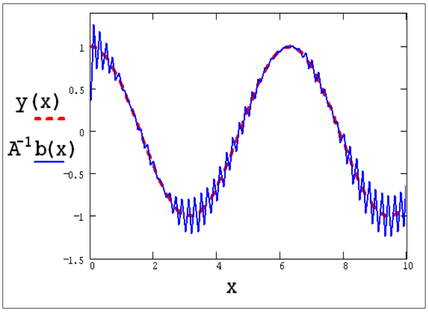

Рис. 12. *Исходный сигнал и «реконструкция» (k=20, $\sigma=10^{-5}$)*

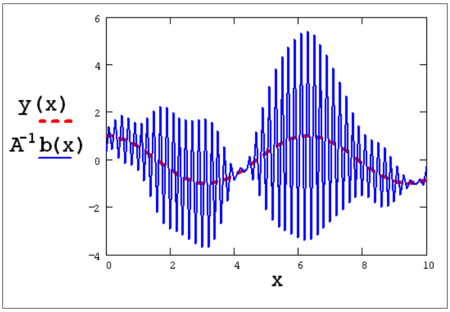

Рис. 13. *Исходный сигнал и «реконструкция» (κ=20, $\sigma=10^{-4}$)*

Действительно, если домножить соотношение (27), к которому приводит дискретизация интеграла (6), на обратную матрицу $\mathbf{A}^{-1}$, а также забыть о наличии шума, то, на первый взгляд, можно ожидать, что оценка

$$\mathbf{y}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{b} \qquad (28)$$

даст правильное решение задачи. Увы! Реконструкция сигнала путем простого обращения матрицы **A** оказывается удачной лишь для очень низких значений уровня шума $\boldsymbol{\sigma}$ (рис. 12), а при даже незначительном его увеличении решение $\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{b}$ оказывается совершенно нефизическим (рис. 13). Дело, конечно, в том, что матрица **A** является плохо обусловленной, и, несмотря на существование обратной матрицы $\mathbf{A}^{-1}$, наличие даже очень слабого шума не позволяет отыскать верного решения. Очевидно, что для получения осмысленного результата следует применять иные методы, которые будут представлены в следующих разделах.