

§8. Вейвлетный анализ

В последнее время возрос интерес к другим интегральным преобразованиям, в частности, к *вейвлет-преобразованию* (или, по-другому, *дискретному волновому преобразованию*). Оно применяется, главным образом, для анализа нестационарных сигналов и для многих задач подобного рода оказывается более эффективным, чем преобразование Фурье.

Основным отличием вейвлет-преобразования является разложение данных не по синусоидам (как для преобразования Фурье), а по другим функциям, называемым вейвлетобразующими. Вейвлетобразующие функции, в противоположность

бесконечно осциллирующим синусоидам, локализованы в некоторой ограниченной области своего аргумента, а вдали от нее равны нулю или ничтожно малы. Пример такой функции, называемой «мексиканской шляпой», показан на рис. 81.

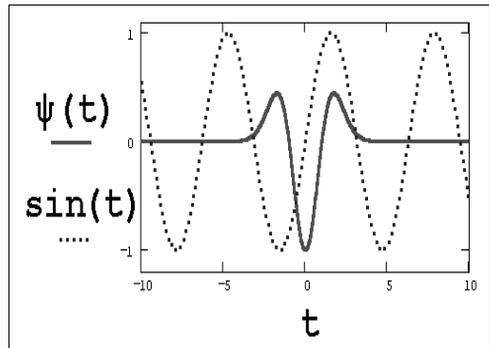


Рис. 81. Сравнение синусоиды и вейвлетобразующей функции

Из-за своего математического смысла вейвлет-спектр имеет не один аргумент, а два. Помимо частоты, второй аргумент b описывает локализацию вейвлетобразующей функции. Поэтому b имеет ту же размерность, что и x . Таким образом, переменная a соответствует периоду анализируемого сигнала, переменная b задаёт его временную локализацию.

Согласно определению, вейвлет-спектр является следующим интегралом от произведения вейвлетобразующей функции $\psi(a,b)$ и сигнала $y(x)$:

$$W(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} y(x) \cdot \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx . \quad (42)$$

Итак, вейвлетное преобразование $W(a,b)$ принципиально отличается от преобразования Фурье тем, что двухпараметрическая вейвлетобразующая функция $\psi(a,b)$ хорошо локализована как по частоте, так и по времени. Поэтому вейвлетное разложение оказывается особенно полезным для исследования нестационарных процессов и является по сути спектральным анализом локальных (непродолжительных по времени) возмущений. Такие задачи очень характерны для геофизики или финансового анализа.

Подобно тому, как мы это делали при работе с Фурье-спектрами, рассмотрим сначала модельную детерминированную функцию

$$y(x) = 1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 0.02 \cdot x) + 0.3 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 0.1 \cdot x), \quad (43)$$

а затем рассчитаем ее вейвлет-преобразование.

В качестве вейвлетобразующей функции выберем ту же «мексиканскую шляпу» (рис. 81), которая определяется как вторая производная функции Гаусса.

$$\psi(x) = \frac{d^2}{dt^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) . \quad (44)$$

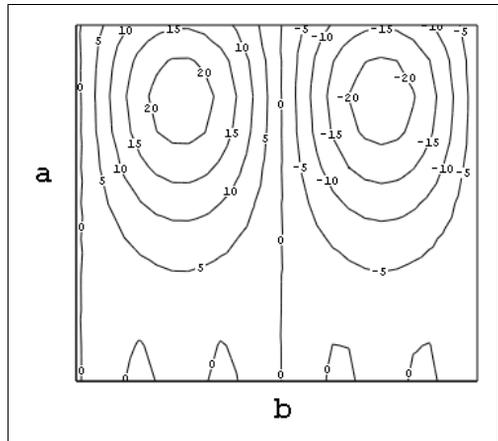


Рис. 82. Вейвлет-спектр модельного сигнала (две синусоиды)

Вейвлет-спектр зависимости (40), вычисленный согласно определению (39), представлен на рис. 82. Этот график двухпараметрического вейвлет-спектра $W(a,b)$ выведен в виде традиционных для вейвлет-анализа линий уровня. Крупные максимум и минимум в верхней части спектра соответствуют низкочастотной гармонике, а мелкие локальные

экстремумы в нижней части (т.е. в области малых значений периода a анализируемого сигнала) – низкочастотным.

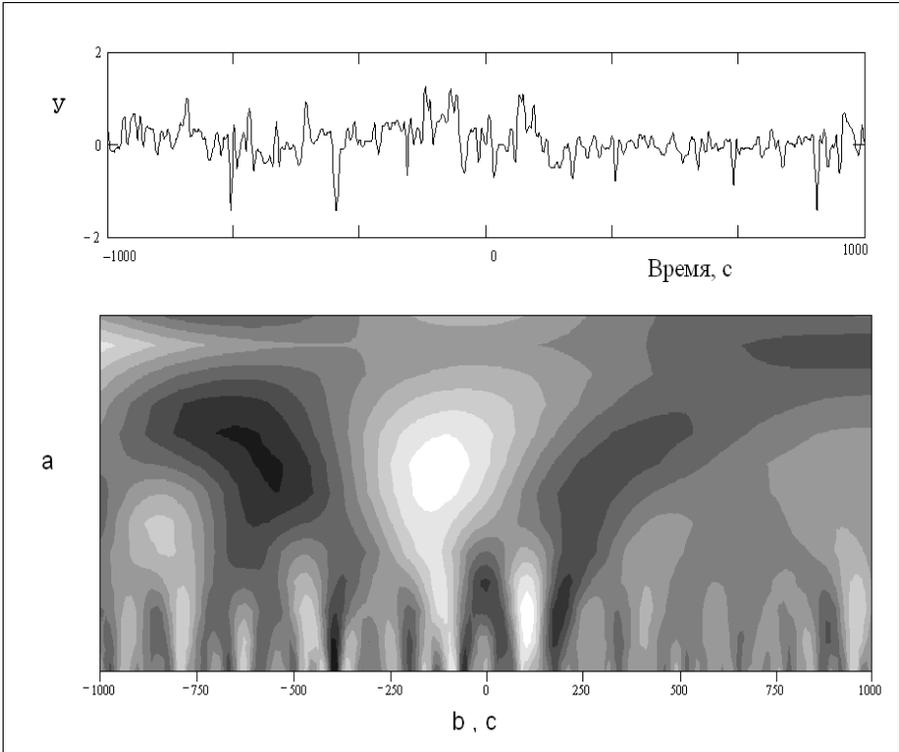


Рис. 83. Экспериментальные данные дистанционного зондирования атмосферы и их вейвлет-спектр

Расчёт вейвлет–спектров оказывается полезным при изучении нерегулярной динамики в различных геофизических процессах. Приведем пример вейвлет-спектра данных дистанционного зондирования верхней атмосферы, которые, фактически, соответствуют дрейфовым и турбулентным движениям в ионосферной плазме. На рис. 83 представлены, синхронно относительно времени, и сами данные (верхний график), и их вейвлет-спектр (нижний график).

На нижнем графике показана соответствующая картина уровней вейвлет–коэффициентов $W(a,b)$ сигнала $y(t)$. По вертикальной оси

отложены (в степенном масштабе в относительных единицах) периоды вейвлет–преобразования a , по горизонтальной оси – временной сдвиг b . Приведённый экспериментальный пример иллюстрирует достаточно типичную атмосферную картину: наличие в ней квазипериодических возмущений различного масштаба.

Вейвлет–спектр ясно указывает на наличие в спектре сигнала высокочастотной компоненты с периодом порядка минут (мелкомасштабные чередующиеся области экстремумов в нижней части графика линий уровня). Эти возмущения, по-видимому, обусловлены турбулентными пульсациями в ионосферной плазме. Встречающиеся в картине коэффициентов ветвления линий уровня говорят о фрактальной природе возмущений (см. следующий раздел). С другой стороны, наличие чётко выраженной периодической компоненты свидетельствует о том, что ионосферная турбулентность, видимо, не является достаточно развитой.

Более низкочастотная составляющая спектра представлена двумя крупномасштабными экстремальными областями в левой половине рисунка. Период их, как можно заключить из рис. 83, составляет порядка десяти–двадцати минут. Видно, что такое колебание, присутствовавшее на протяжении первой половины сеанса измерений, почти отсутствует во время его второй половины, что может быть обусловлено затуханием этого возмущения. Картина исчезновения колебания особенно отчётливо показывает эффективность вейвлет–преобразования для анализа нестационарных процессов.

Таким образом, по вейвлет-спектру можно получить наглядную информацию о частотном спектре сигнала и отчётливо проследить области, в которых процесс отражения сигнала является локально–стационарным. Локализация этих временных участков, контролируемых различными атмосферными процессами, имеет большое значение для геофизического эксперимента.

