Влияние конечности интервала выборки

Теперь следует обратить внимание на само определение преобразования Фурье как интеграла с бесконечными пределами. Его численное отыскание подразумевает принципиальную ограниченность интервала интегрирования (просто в силу конечности объема выборки). Поэтому самым очевидным несоответствием будет поиск, вообще говоря, другого интеграла, отличного от интеграла Фурье. Влияние конечности интервала выборки проявляется, главным образом, на искажении его низкочастотной области.

В качестве примера приведем Фурье-спектр гармонической функции

$$y(x)=1\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot0.015\cdot x). \qquad (35)$$

Результат расчета по алгоритму БПФ изображен на рис. 65 (слева – в обычном, а справа – в более крупном масштабе) и демонстрирует не совсем правильное поведение в низкочастотной области. Как видно, начало спектра содержит довольно широкий максимум вместо одиночного пика, как было в случае средних частот сигнала на рис. 61 и 63.

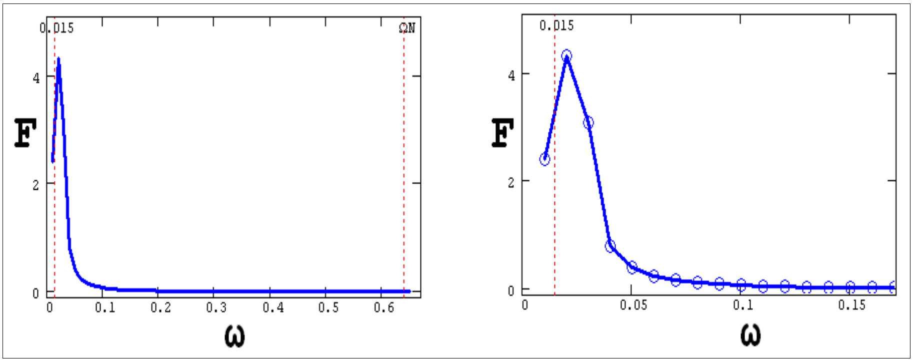

Рис. 65. *Иллюстрация влияния конечности выборки на БПФ*

Если быть точными, вместо спектра некоторой функции f(x) дискретное преобразование Фурье подразумевает вычисление спектра другой функции f(x)·W(x), где W(x) – это функцияступенька, равная единице в пределах расчетного интервала и нулю за его пределами. В частотной области это соответствует операции *свертки* означенных двух функций, что, конечно, искажает (неизвестный) точный спектр f(x). Для борьбы с проявлением конечности интервала выборки используются специальные методы, основанные на применении техники *спектральных окон*. Из сказанного ясно, почему исследователя не должна смущать необходимость дополнения массива исходных данных нулями до размера 2^n (чтобы можно было использовать алгоритм БПФ). По самому определению дискретного Фурье-преобразования, исходная функция и так предполагается равной нулю за пределами расчетного интервала, что приводит к неминуемым искажениям.

Сдвиг ноль-линии

Еще одним, наиболее ярким, проявлением вредного влияния конечности интервала выборки может служить расчет Фурье-преобразования суммы гармонического сигнала и константы (рис. 66). Для того чтобы получить данный рисунок, достаточно слегка модифицировать исходные данные (32), добавив к ним константу (равную, например 1):

$$y(x)=1\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot0.015\cdot x)+\mathrm{const}. \tag{36}$$

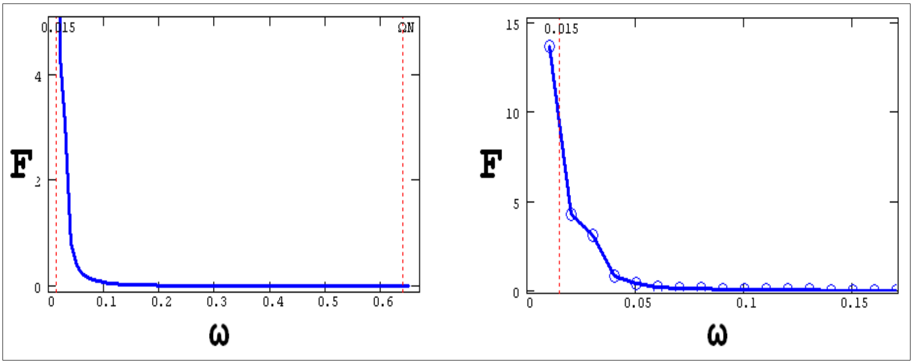

Рис. 66. *Фурье-спектр суммы гармонического сигнала и константы (влияние сдвига ноль-линии)*

Сравнивая рис. 65 и 66, несложно догадаться, почему так разительно изменился вид спектра в низкочастотной области. Пугающий рост спектра на левом крае частотного интервала объясняется совокупностью двух факторов: влиянием конечности выборки и добавлением к сигналу ненулевой постоянной составляющей (так называемым *сдвигом ноль-линии*). Сумма сигнала и константы определяет соответствующее влияние на вычисленный спектр, который также оказывается (просто в силу линейности операции интегрирования) суммой спектров сигнала и ступенчатой функции (равной той самой константе внутри расчетного интервала и нулю за его пределами).

Избавиться от искажений, вызванных сдвигом ноль-линии, довольно просто. Достаточно (до Фурье-преобразования) вычислить среднее значение выборки и затем вычесть его из каждого элемента выборки. Если после этой операции вычислить Фурье-спектр, то он окажется примерно таким, как показано на рис. 65.