Пример: модель «сигнал - шум»

Широко распространенный прием компьютерного моделирования эксперимента связан с представлением его результата в виде суммы некоторого полезного сигнала f(x) и шумовой компоненты σ. Эта модель, называемая моделью *«сигнал – шум»*, с одной стороны, очень проста для реализации, а с другой – чрезвычайно характерна для типичного физического эксперимента. В качестве шума обычно используется серия равномерно или нормально распределенных псевдослучайных чисел.

Различные соотношения интенсивностей сигнала и шума определяют различные условия модельной задачи и позволяют эффективно протестировать алгоритмы, которые разработаны для ее решения. Пример данной модели для различных отношений сигнала и шума показан на рис. 52. В качестве сигнала выбрана гармоническая функция f(x)=sin(x), а в качестве шума – псевдослучайная величина с равномерным законом распределения.

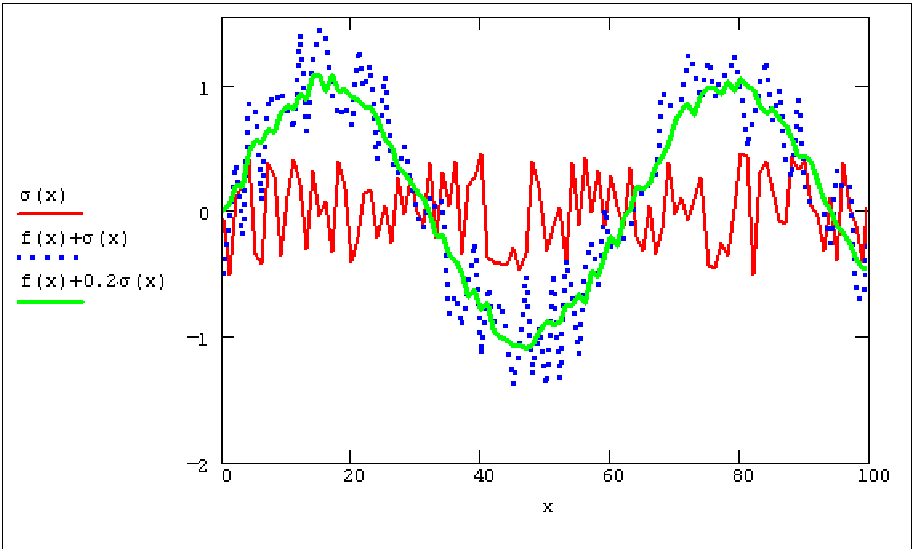

Рис. 52. *Модель сигнал – шум (с разным отношением сигнал / шум)*

Пример: распространение излучения в случайно-неоднородной среде

Интерес к задачам распространения волн в случайно-неоднородной среде, например, атмосфере, объясняется, главным образом, бурным развитием спутниковых технологий и дистанционного мониторинга. В частности, большое значение для телекоммуникаций приобрело моделирование мобильной радиосвязи.

Метод лучей наиболее прост и нагляден. Расчёт траекторий лучей, испускаемых передатчиком, основан на законе Снеллиуса. Согласно ему, в приближении геометрической оптики лучевые уравнения для угла между направлением луча и вертикалью $\vartheta(x,z)$ в любой точке пространства (x,z) имеют вид:

$$\sin\vartheta_0 = n(x,z)\cdot\sin\vartheta(x,z), \tag{23}$$

где $n(x,z)$ – показатель преломления среды. Он содержит информацию о состоянии среды и может представлять собой, к примеру, сумму регулярного профиля, синусоидальных неоднородностей и случайной компоненты (шума), как показано на рис. 53. Иными словами, для задания $n(x,z)$ используется случайное поле, созданное согласно модели сигнал / шум.

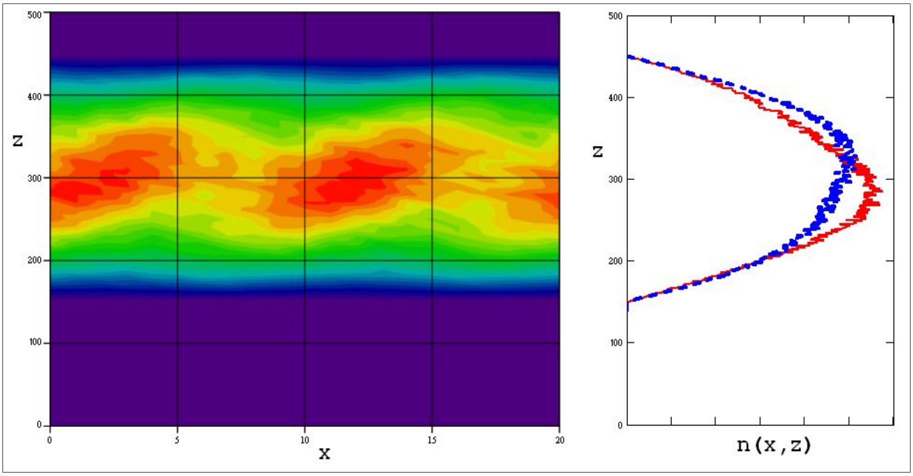

Рис. 53. *Модель случайно-неоднородного поля n(x,z) типа «сигнал – шум»*

Поскольку $tg\vartheta(x,z)=dx/dz$, то распространение луча описывается обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$\frac{dx}{dz}=\pm\frac{1}{\sqrt{\left|\frac{n^2(x,z)}{\sin^2\vartheta_0}-1\right|}}\ . \tag{24}$$

В связи с рассматриваемой моделью распространения сигнала в случайно-неоднородной среде возникает несколько типов практически интересных задач. Одной из них является отыскание всех возможных траекторий, связывающих передатчик и приёмник. При этом предполагается, что передатчик излучает радиоволны с широкой диаграммой направленности, например, даже круговой (т.е. под углами $-\pi<\vartheta_0<\pi$). Такая задача важна, в частности, для диагностики многолучевого приёма. Другое важное приложение задачи – расчет характеристик сигнала, прошедшего сквозь среду, (например, амплитуды, фазы) и установление их связи с параметрами неоднородностей поля.

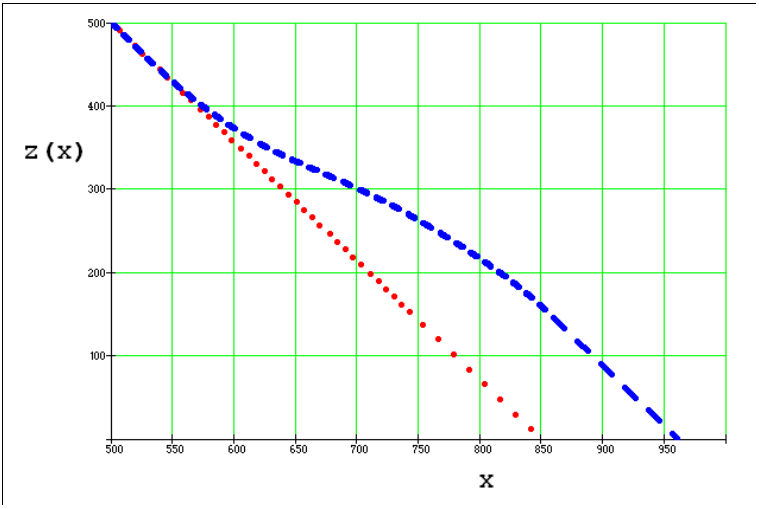

Рис. 54. *Трассы радиоволны в случайно-неоднородной среде*

Приведем в качестве примера расчет трассы многолучевого приёма радиосигнала в атмосфере (рис. 54). Как правило, многолучевой приём нежелателен в радиосвязи, поскольку вызывает интерференцию приходящих одновременно в точку приёма лучей, что повышает помехи.

Задача отыскания функции $z(x,\vartheta_0)$ сводится к решению дифференциального уравнения (24) с граничными условиями:

$$z(x_T=0)=z_T, \tag{25}$$

$$z(x_R)=z_R=0. \tag{26}$$

Это типичная краевая задача, которую легко решить методом пристрелки (см. §5.3). Естественный пристрелочный параметр ϑ_0 отражает основную идеологию лучевых методов моделирования распространения волн: расчет траекторий всех лучей, «выстреливаемых» передатчиком под всевозможными углами. Перебирая по очереди углы ϑ_0 и решая задачу (24) как обычную задачу Коши только с левым граничным условием (25), можно определить для каждого ϑ_0 точку пересечения луча с Землёй

$L(\vartheta_0)$. Перебрав все значения ϑ_0, легко определить те, которые удовлетворяют правому краевому условию $L(\vartheta_0)= x_R$, т.е. как раз те лучи, которые попадают в приемник сигнала (рис. 54).

После того, как траектория (или траектории, если имеет место многолучевой прием) найдена, можно определить вдоль нее соответствующие интегральные характеристики радиоволны (фаза, ослабление амплитуды и др).

При работе с генерацией стационарных случайных процессов или полей любопытно проверить их эргодическое свойство. Попросту говоря, *эргодичность* случайного поля заключается в равенстве статистических характеристик выборки, полученной вдоль любой траектории. Приведем соответствующие расчеты выборочной дисперсии, используя для них случайное поле рис. 53 и траектории рис. 54. Две зависимости дисперсии $D_{1,2}(N)$ от объема пространственной выборки N показаны на рис. 55. Из него видно, что с ростом объема выборки значения дисперсии, вычисленные по двум разным траекториям, становятся близкими.

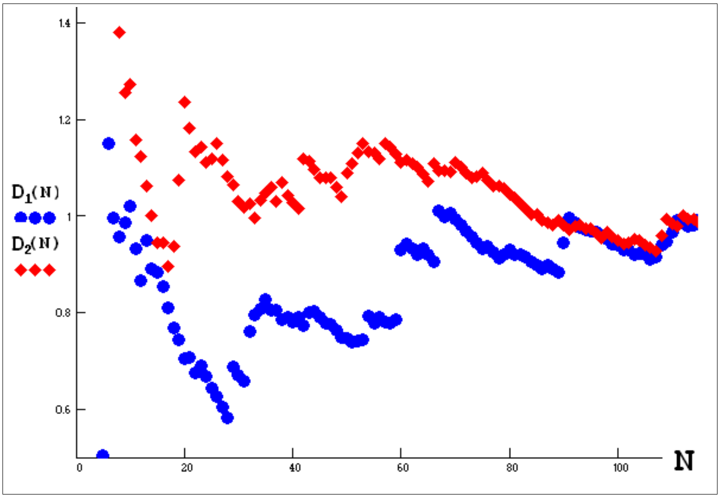

Рис. 55. *К проверке эргодичности*