

Многомерная интерполяция

Многомерная интерполяция означает построение функции, проходящей через точки, заданные не на плоскости, а в пространстве (трех-, четырех-мерном и т.д.). Таким образом, вместо зависимости $y_i=y(x_i)$, которую мы аппроксимировали функцией $f(x)$, следует построить интерполяцию по данным $w(x_i, y_i, \dots)$, т.е. найти функцию нескольких координат $f(x, y, \dots)$. В двумерном случае аргументов всего два, т.е. (например, x и y).

Если узлы расположены в форме правильной сетки, например, в двумерном случае, в виде прямоугольной сетки, то с построением многомерной интерполяции принципиальных проблем не возникает. Самые простые типы интерполяции – это кусочно-постоянная (рис. 34) и кусочно-планарная (принцип ее построения проиллюстрирован рис. 35, на котором изображен график интерполирующей функции на элементарном фрагменте сетки). Примеры сплайн-интерполяции будут приведены ниже.

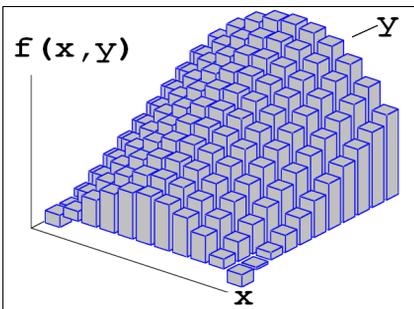


Рис. 34. Кусочно-постоянная двумерная интерполяция

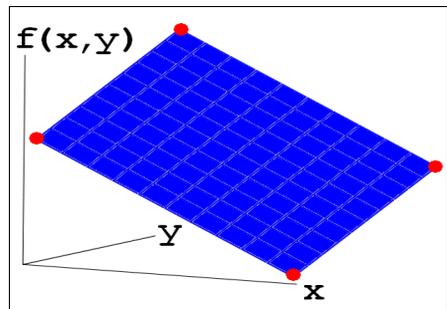


Рис. 35. Построение кусочно-планарной интерполяции

Чуть сложнее дело обстоит, если исходная выборка не привязана к сетке, а представляет собой разрозненные ряды данных. Такая ситуация очень типична для геофизических экспериментов, которые часто предусматривают регистрацию различных параметров (метеорологических, геомагнитных и т.д.) в определенных точках на поверхности Земли (станциях наблюдения).

Приведем в качестве примера входных данных временные измерения некоторого параметра в нескольких точках сравнительно небольшого региона (рис. 36). Фактически, мы имеем выборку случайного поля $w(\theta, \phi, t)$, которое зависит не только от пространственных (полярных) координат θ и ϕ , но и от времени t .

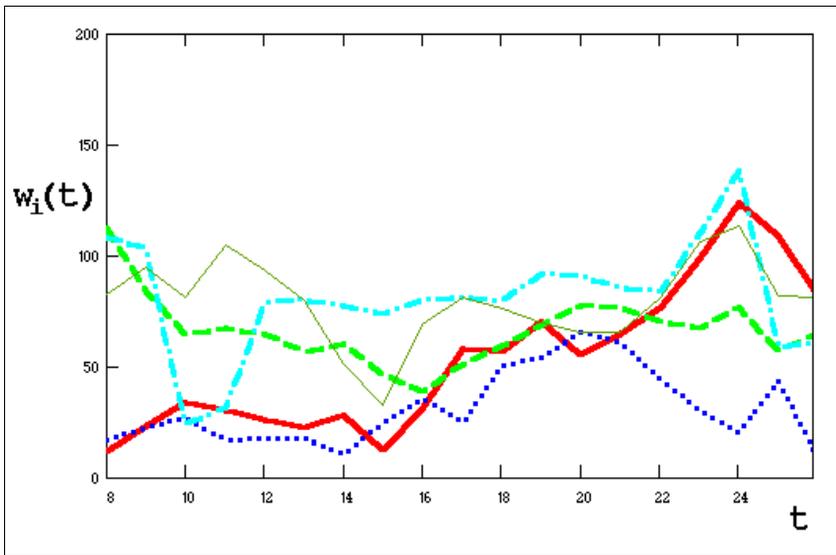


Рис. 36. Геофизические измерения (пять станций наблюдения)

Сопоставление кривых для каждой из станций наблюдения позволяет проследить различие и сходство измерений. Имея в регионе даже всего несколько измерительных точек с координатами (θ_L, ϕ_L) , где L – индекс станции измерения, можно аппроксимировать по ним непрерывную функцию $W(\theta, \phi)$ для некоторой окрестности этих точек. Приведем пример такой аппроксимации, построив ее сначала по пространственным координатам (для каждого отдельного момента времени измерений), а на завершающей стадии – по времени.

В качестве аппроксимирующей функции возьмем следующее соотношение:

$$W(\theta, \phi) \approx C \sum_L W_L / \rho_L^2(\theta, \phi), \quad (14)$$

где $\rho_L(\theta, \phi)$ – расстояние от (любой) точки (θ, ϕ) до L -й измерительной станции, W_L – измерение на этой станции, C – нормировочный множитель, зависящий от координат точки (θ, ϕ) . Чем ближе точка (θ, ϕ) к L -й станции, с тем большим весом берется соответствующее слагаемое W_L . Если пренебречь сферичностью Земли (т.е. рассматривать не слишком большой регион), то аппроксимирующая функция запишется в виде

$$W(\theta, \phi) \approx C \sum_L \frac{W_L}{(\theta - \theta_L)^2 + (\phi - \phi_L)^2}, \quad (15)$$

а нормировочный множитель будет следующим:

$$C(\theta, \phi) = \left(\sum_L \frac{1}{(\theta - \theta_L)^2 + (\phi - \phi_L)^2} \right)^{-1}. \quad (16)$$

В частном случае узлов, т.е. если $(\theta, \phi) = (\theta_L, \phi_L)$, аппроксимация берется в очевидном виде $W(\theta, \phi) = W_L$, а не по формуле (15).

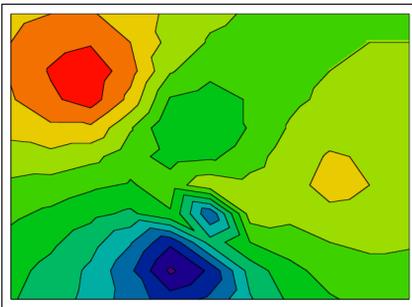


Рис. 37. Интерполяция по разрозненным данным

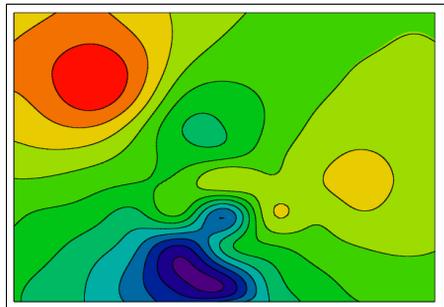


Рис. 38. Повторная двумерная сплайн-интерполяция

Результат работы описанного алгоритма приведен на рис. 37, иллюстрирующем в виде линий уровня пространственное распределение $W(\theta, \phi, t = \text{const})$, согласно формуле (15). Те же

графики, но уже в динамике, Вы можете просмотреть, вернувшись к рис. 16. Пример случайного поля, который мы приводили в §1, относился именно к рассматриваемой задаче. Любопытно также сопоставить рис. 16 с временными (одномерными) графиками исходных данных рис. 36.

Улучшить визуализацию полученного поля можно путем повторной интерполяции более гладкой функцией. Поскольку первая задача (перехода от разрозненных данных к сетке) решена, то теперь не представляет сложности запустить алгоритм двумерной сплайн-интерполяции, чтобы перейти от грубой сетки к более подробной. Соответствующий результат показан на рис. 38 (формулы двумерной сплайн-интерполяции из экономии места приводить не будем).

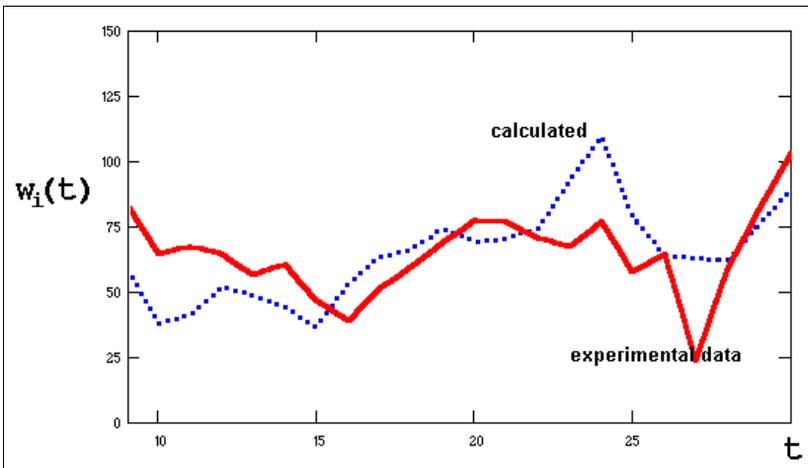


Рис. 39. Проверка качества интерполяции

Обоснованность предложенного способа можно проверить экспериментально. Для этого аппроксимируем функцию $W(\theta, \phi)$ не по всем имеющимся пяти, а по четырем узлам $L=0...3$ (т.е. «выключим» из исходного массива данных одну экспериментальную точку). Затем по формуле (15) рассчитаем значение $f(\theta_4, \phi_4)$ в оставшемся пятом узле и сравним, насколько полученное

значение отличается от реально измеренного в этой точке. На рис. 39 показано такое сравнение аппроксимации в одной из точек (пунктир) и измерений находящейся в этой точке станции (сплошная кривая). Видно, что совпадение хорошее для первых двух третей периода измерений и худшее – для последней трети. Почему так происходит, читатель может попробовать догадаться, вернувшись к рис. 16, представляющему динамику рассматриваемого явления.